

1.1.1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$

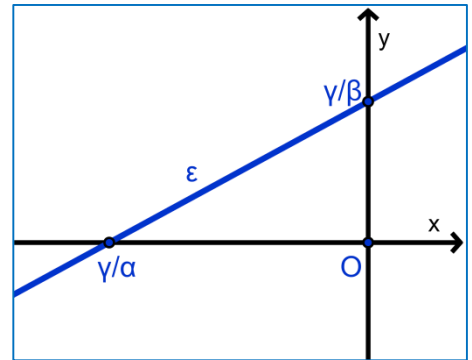
Κάθε εξίσωση που έχει τη μορφή $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $x, y \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **γραμμική εξίσωση**.

Μία γραμμική εξίσωση παριστάνει **ευθεία γραμμή** όταν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

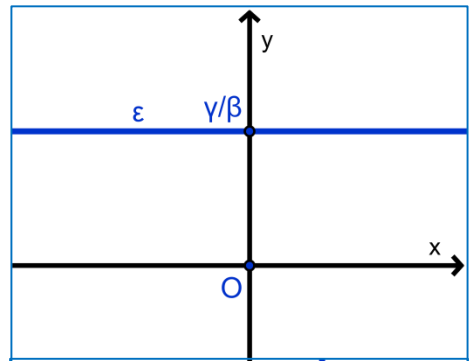
★ Αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση γράφεται στη μορφή $y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$ και παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$.

Ειδικότερα:

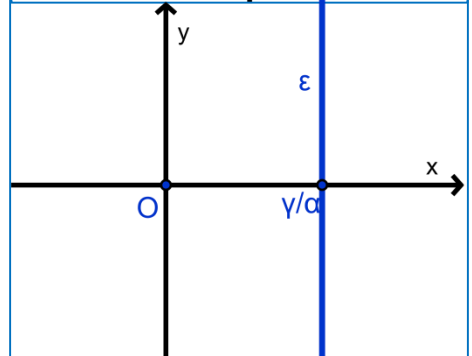
★ Αν $\alpha \neq 0$ η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες.



★ Αν $\alpha = 0$ η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{\beta}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$.



★ Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$) η εξίσωση γράφεται στη μορφή $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.



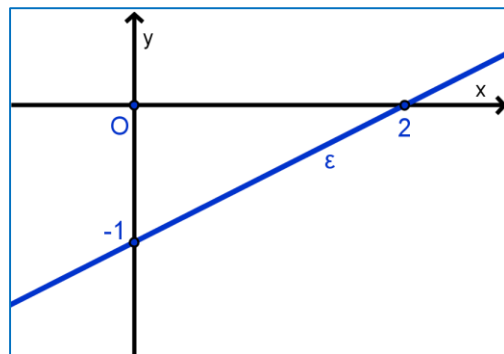
Παράδειγμα:

☀ Η εξίσωση $x - 2y = 2$ παίρνει τη μορφή

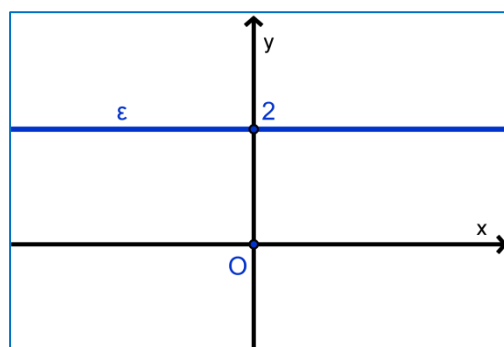
$y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει

συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον

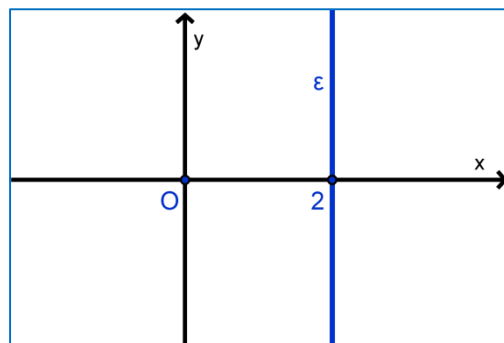
άξονα $y'y$ στο σημείο -1 και τον άξονα $x'x$ στο σημείο 2 .



☀ Η εξίσωση $y = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 2 .



☀ Η εξίσωση $x = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο 2 .



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.

Παράδειγμα:

Το ζεύγος $(4, 1)$ είναι λύση της εξίσωσης $x - 2y = 2$, αφού $4 - 2 \cdot 1 = 2$.

Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη $(6, 2)$, $(-2, -2)$ είναι λύσεις της εξίσωσης

και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $(2\kappa + 2, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Σχόλια:

☀ Στη γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, τα x, y λέγονται **άγνωστοι**, τα α, β λέγονται **συντελεστές των αγνώστων** και το γ λέγεται **σταθερός όρος**.

☀ Σε μια ευθεία εξίσωση $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$, ο αριθμός α ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$, δηλαδή: $\alpha = \varepsilon\varphi\omega$

☀ Αν μια ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y = y_0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = 0$.

☀ Αν μια ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $\varepsilon: x = x_0$ και δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

☀ Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, και έχει συντελεστή διεύθυνσης, έχει εξίσωση: $\varepsilon: y = \alpha x$

☀ Δύο ευθείες με εξισώσεις: $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι **παράλληλες ή ταυτίζονται** αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ειδικότερα αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$ οι ευθείες ταυτίζονται, ενώ αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$ οι ευθείες είναι παράλληλες.

1.1.2. Γραμμικό σύστημα 2x2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $\alpha x + \beta y = \gamma$ και $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **γραμμικό σύστημα**

δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και γράφουμε:
$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα συστήματα**.

Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται συνήθως με έναν από τους εξής δύο τρόπους:

✦ Λύνουμε τη μια εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.

✦ Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις (ε) ή (ε') του συστήματος, π.χ. την (ε) , με την εξίσωση « $\lambda(\varepsilon) + \lambda'(\varepsilon')$ » που προκύπτει, αν στα μέλη της (ε) πολλαπλασιασμένα με $\lambda \neq 0$, προσθέσουμε τα μέλη της (ε') πολλαπλασιασμένα με λ' .

Η εξίσωση $\lambda(\varepsilon) + \lambda'(\varepsilon')$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των εξισώσεων (ε) και (ε') .

Η απόδειξη του ότι τα συστήματα που προκύπτουν από τις παραπάνω μετατροπές είναι ισοδύναμα στηρίζεται στις παρακάτω ιδιότητες της ισότητας:

⇒ Αν $\gamma \neq 0$, τότε: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

⇒ Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$

Σχόλια:

☀ Το γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους πιο σύντομα το λέμε **γραμμικό σύστημα 2x2**.

☀ Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \alpha' x + \beta' y = 0 \end{cases}$ ονομάζεται **ομογενές** και δεν είναι ποτέ αδύνατο

αφού έχει πάντα λύση την $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Ενδέχεται βέβαια να έχει και άπειρες λύσεις.

☀ Δύο συστήματα που έχουν τις **ίδιες λύσεις** ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Μέθοδοι λύσης συστήματος

★ **Αντικατάσταση**

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- ➡ Λύνουμε μια εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο.
- ➡ Αντικαθιστούμε στην άλλη αυτόν τον άγνωστο.
- ➡ Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει και βρίσκουμε τον έναν άγνωστο.
- ➡ Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε και βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα:

Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 0 & (1) \\ -x + 2y = 2 & (2) \end{cases}$

Λύση

➡ Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, για παράδειγμα την (2) ως προς x και έχουμε $-x + 2y = 2 \Leftrightarrow x = 2y - 2$

➡ Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση το x , οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και επιλύουμε: $2(2y - 2) - 3y = 0 \Leftrightarrow 4y - 4 - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 4$

➡ Αντικαθιστούμε την τιμή του y που βρήκαμε στην δεύτερη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο: $x = 2y - 2 \Leftrightarrow x = 2 \cdot 4 - 2 \Leftrightarrow x = 6$

⇒ Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (6, 4)$

★ Αντίθετων συντελεστών

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ακολουθούμε τα εξής βήματα:

⇒ Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι.

⇒ Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις.

⇒ Προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο και τη λύνουμε.

⇒ Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε και έτσι υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα:

Να λύσετε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Λύση

⇒ Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις δύο εξισώσεις να είναι αντίθετοι:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-3) \\ \cdot 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -15 & (1) \\ 6x - 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

⇒ Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις που βρήκαμε και προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία επιλύουμε: $(1) + (2) \Rightarrow 7y = -7 \Rightarrow y = -1$

⇒ Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις (στην πιο απλή) και βρίσκουμε την τιμή του άλλου αγνώστου:

$$3x - (-1) = 4 \Leftrightarrow 3x + 1 = 4 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

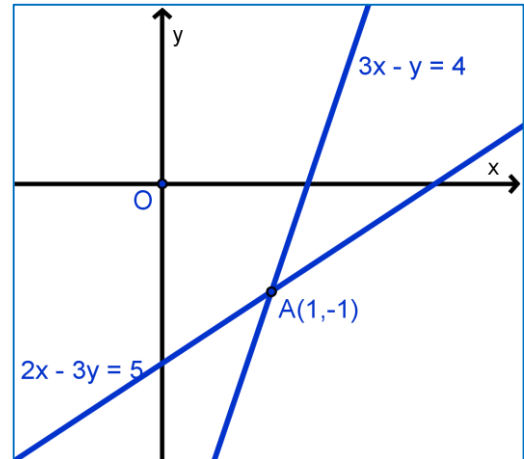
⇒ Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1, -1)$

1.1.3. Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2

Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

που λύσαμε προηγουμένως, παριστάνει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει τη λύση του συστήματος, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν συγχρόνως τις δύο εξισώσεις του συστήματος.



Σχόλια:

☀ Ο γραφικός τρόπος επίλυσης ενός συστήματος δεν είναι ο αποτελεσματικότερος διότι σε κάποιες περιπτώσεις ενδέχεται να μην μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τη λύση του.

☀ Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2 αναμένουμε μία μόνο από τις παρακάτω περιπτώσεις:

⇒ Το σύστημα έχει **μοναδική λύση** (x_0, y_0) (οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A(x_0, y_0)$)

⇒ Το σύστημα είναι **αδύνατο** (οι ευθείες είναι παράλληλες)

⇒ Το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** (οι ευθείες συμπίπτουν)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1.1. Δίνεται η γραμμική εξίσωση $3x - y = 8$ (1)

α. Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(2, -2)$ και $(1, -3)$ αποτελούν λύση της παραπάνω εξίσωσης.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να βρούμε τη μορφή των λύσεων μιας γραμμικής εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, λύνουμε την εξίσωση ως προς έναν άγνωστο που τον ονομάζουμε ελεύθερο άγνωστο. Αν για παράδειγμα είναι $\beta \neq 0$, είναι:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$$

Τότε οι άπειρες λύσεις της

β. Να βρείτε τη μορφή των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης.

α. Η εξίσωση (1) για $x=2$ και $y=-2$ γίνεται: $3 \cdot 2 - (-2) = 8 \Leftrightarrow 6 + 2 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$ που ισχύει. Άρα το ζεύγος $(2, -2)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης (1).

Η εξίσωση (1) για $x=1$ και $y=-3$ γίνεται: $3 \cdot 1 - (-3) = 8 \Leftrightarrow 3 + 3 = 8 \Leftrightarrow 6 = 8$ που δεν ισχύει. Άρα το ζεύγος $(1, -3)$ δεν αποτελεί λύση της εξίσωσης (1).

β. Η εξίσωση (1) γίνεται: $y = 3x - 8$
Άρα οι άπειρες λύσεις της εξίσωσης (1) είναι τα ζεύγη $(x, y) = (x, 3x - 8), x \in \mathbb{R}$.

εξίσωσης είναι τα ζεύγη

$$(x, y) = \left(x, \frac{\gamma - \alpha x}{\beta} \right), x \in \mathbb{R}.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να εξετάσουμε αν ένα ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ εξετάζουμε αν αυτή αληθεύει για $x = x_0$ και $y = y_0$.

1.1.2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ 3 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

1.1.3. Να λύσετε τα συστήματα.

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = 0 & (1) \\ x + y = 45 & (2) \end{cases}$$

Από τη (2) έχουμε $y = 45 - x$ και με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει

$$8x - 7(45 - x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 315 + 7x = 0 \Leftrightarrow 15x = 315 \Leftrightarrow x = 21.$$

Τότε $y = 45 - 21 = 24$ κι έτσι η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(21, 24)$.

$$\beta. \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 3y - 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -2 & (1) \\ 4x + 3y = 8 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Είναι } (1) + (2) \Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ και } (2) - (1) \Rightarrow 6y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{3}.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

1.1.4. Να λύσετε τα συστήματα.

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases}$$

α. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος

$$\text{γράφεται } \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 \cdot \frac{x-5}{2} + 14 \cdot \frac{2y+1}{7} + 14 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x - 35 + 4y + 2 + 28 = 0 \Leftrightarrow 7x + 4y = 5.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x+6}{3} - 6 \cdot \frac{y-6}{2} = 6 \cdot 8 \Leftrightarrow 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 12 - 3y + 18 = 48 \Leftrightarrow 2x - 3y = 48 - 30 \Leftrightarrow 2x - 3y = 18.$$

$$\text{Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα} \begin{cases} 7x + 4y = 5 & (1) \\ 2x - 3y = 18 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Απαλείφουμε το } y : \begin{cases} 7x + 4y = 5 & (\times 3) \\ 2x - 3y = 18 & (\times 4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 12y = 15 \\ 8x - 12y = 72 \end{cases}$$

$$\text{Με πρόσθεση κατά μέλη θα είναι: } 29x = 87 \Leftrightarrow x = \frac{87}{29} \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Οπότε } (1) \Leftrightarrow 7 \cdot 3 + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y = -21 + 5 \Leftrightarrow 4y = -16 \Leftrightarrow y = -4$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (3, -4)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να επιλύσουμε σύστημα που έχει παρονομαστές κάνουμε πρώτα απαλοιφή παρονομαστών και στη συνέχεια ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

β. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται: $\frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{2x-1}{3} = 12 \cdot 4 - 12 \cdot \frac{y+2}{4} \Leftrightarrow 4(2x-1) = 48 - 3(y+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 4 = 48 - 3y - 6 \Leftrightarrow 8x + 3y = 46.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται $\frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x+3}{2} - 6 \cdot 3 = 6 \cdot \frac{x-y}{3} \Leftrightarrow 3(x+3) - 18 = 2(x-y) \Leftrightarrow 3x + 9 - 18 = 2x - 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 9$$

Έτσι το αρχικό σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} 8x + 3y = 46 & (1) \\ x + 2y = 9 & (2) \end{cases}$$

Από την (2) είναι $x = 9 - 2y$, οπότε από την (1)

$$\text{θα πάρουμε } 8(9 - 2y) + 3y = 46 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72 - 16y + 3y = 46 \Leftrightarrow -13y = -26 \Leftrightarrow y = 2$$

Η (2) για $y = 2$ γίνεται $x + 2 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow x = 5$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (5, 2)$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

1.1.5. Να λύσετε τα συστήματα.

$$\alpha. \begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha. \text{ Είναι } \begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases} \text{ κι άρα το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

$$\beta. \text{ Είναι } \begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

Αφού $x - 2y = -2 \Leftrightarrow x = 2y - 2$, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(2\kappa - 2, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

1.1.6. Αν $|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$ βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\text{Έχουμε } |x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x - 3y + 1| = 0 \text{ και } |2x + y - 5| = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ 2(3y - 1) + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ 6y - 2 + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ 7y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν έχουμε άθροισμα απολύτων τιμών ίσο με το μηδέν τότε πρέπει οι απόλυτες τιμές να είναι όλες ίσες με το μηδέν, δηλαδή;

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 0$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύσαμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

1.1.7. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2|x - 1| + |y + 2| = 4 \\ 2|x - 1| + 3|y + 2| = 10 \end{cases}$

Θέτουμε $|x - 1| = \alpha$ και $|y + 2| = \beta$ και το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 & (1) \\ 2\alpha + 3\beta = 10 & (2) \end{cases}$.

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε

$$2\beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 3. \text{ Άρα } 2\alpha + 3 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Έτσι: } |x - 1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{2} \text{ ή } x - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = \frac{1}{2} \text{ και } |y + 2| = 3 \Leftrightarrow$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Θέτουμε τις παραστάσεις που συναντάμε στο σύστημα με νέες μεταβλητές και το σύστημα μετασχηματίζεται σε γραμμικό σύστημα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν $\alpha > 0$ είναι:

$$|x| = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$$

$\Leftrightarrow y + 2 = 3$ ή $y + 2 = -3 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -5$. Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη: $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ ή $\left(\frac{3}{2}, -5\right)$ ή $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ή $\left(\frac{1}{2}, -5\right)$

1.1.8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 5)$

Η ευθεία έχει τη μορφή $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ και αφού διέρχεται από τα σημεία A και B , οι συντεταγμένες τους θα την επαληθεύουν. Έχουμε:

$$A \in \varepsilon \Leftrightarrow 2 = \alpha \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \quad (1)$$

$$B \in \varepsilon \Leftrightarrow 5 = \alpha \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = 5 \quad (2)$$

Επομένως αρκεί να λύσουμε το σύστημα των (1) και (2). Είναι:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 3\alpha + \beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \beta \\ 3(2 - \beta) + \beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \beta \\ 6 - 3\beta + \beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \beta \\ -2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 5)$ είναι

$$\varepsilon: y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν αναζητάμε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία με διαφορετικές τετμημένες, τότε θεωρούμε την ευθεία στη μορφή $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ και επαληθεύουμε τις συντεταγμένες των σημείων στην εξίσωση της (ε). Έτσι προκύπτει σύστημα με αγνώστους τα α, β από το οποίο λύνοντάς το, προσδιορίζουμε τα α, β και άρα και την εξίσωση της (ε).

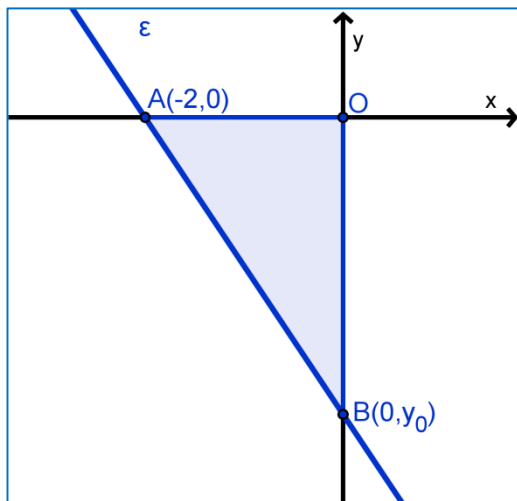
ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύσαμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

1.1.9. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2,0)$ και σχηματίζει με τους άξονες στο 3^ο τεταρτημόριο, τρίγωνο με εμβαδόν 3 τ.μ.

Το ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχει βάση 2 και από τον τύπο του εμβαδού $E = \frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2}$ βρίσκουμε $3 = \frac{2 \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = 3$.

Επομένως θα είναι $B(0,-3)$.



Η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ και αφού διέρχεται από τα σημεία A και B , θα την επαληθεύουν. Έτσι:
 $A \in \varepsilon \Leftrightarrow 0 = \alpha \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = 0$ (1)
 και $B \in \varepsilon \Leftrightarrow -3 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$.

$$\text{Άρα } (1) \Leftrightarrow -2\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $\varepsilon: y = -\frac{3}{2}x - 3$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Το εμβαδόν τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2}$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν αναζητάμε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία με διαφορετικές τετμημένες, τότε θεωρούμε την ευθεία στη μορφή $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ και επαληθεύουμε τις συντεταγμένες των σημείων στην εξίσωση της (ε) . Έτσι προκύπτει σύστημα με αγνώστους τα α, β από το οποίο λύνοντάς το, προσδιορίζουμε τα α, β και άρα και την εξίσωση της (ε) .

1.1.10. Αν η εξίσωση: $(\alpha + 3\beta + 4)x + (3\alpha - 2\beta - 10)y + 1 = 0$ δεν παριστάνει ευθεία, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η δοθείσα εξίσωση δεν παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν: $\alpha + 3\beta + 4 = 0$ και $3\alpha - 2\beta - 10 = 0$
Τότε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + 3\beta + 4 = 0 \\ 3\alpha - 2\beta - 10 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\beta - 4 \\ 3 \cdot (-3\beta - 4) - 2\beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\beta - 4 \\ -9\beta - 12 - 2\beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\beta - 4 \\ -11\beta = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \cdot (-2) - 4 \\ \beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς, η δοθείσα εξίσωση δεν παριστάνει ευθεία αν $(\alpha, \beta) = (2, -2)$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

1.1.11. Η ευθεία $\varepsilon: (3\alpha + \beta + 1)x + (\alpha - \beta + 2)y - 2 = 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη $x = 1$ και τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $y = 2$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.

β. Για τις παραπάνω τιμές των α, β να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(-2, 2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) .

α. Το σημείο $A(1, 0)$ ανήκει στην ευθεία οπότε την επαληθεύει, δηλαδή:

$$A \in \varepsilon \Leftrightarrow (3\alpha + \beta + 1) \cdot 1 + (\alpha - \beta + 2) \cdot 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta - 1 = 0 \quad (1)$$

Ομοίως το σημείο $B(0, 2)$ επαληθεύει την ευθεία οπότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$B \in \varepsilon \Leftrightarrow (3\alpha + \beta + 1) \cdot 0 + (\alpha - \beta + 2) \cdot 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 2\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta + 1 = 0 \quad (2). \text{ Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2):}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta - 1 = 0 \\ \alpha - \beta + 1 = 0 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3\alpha + \beta - 1 = 0 \\ 4\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta - 1 = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Τότε $\varepsilon: 2x + y - 2 = 0$

β. Είναι: $\varepsilon: 2x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 2$

Άρα η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -2$.

Έστω $\zeta: y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας. Ισχύει $\varepsilon // \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda = -2$

Άρα $\zeta: y = -2x + \beta$

Επειδή η ευθεία (ζ) διέρχεται από το σημείο M ισχύει η ισοδυναμία:

$$M \in \zeta \Leftrightarrow 2 = -2 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow 2 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2$$

Τελικά $\zeta: y = -2x - 2$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες, ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$.

1.1.12. Η εξίσωση: $2x^2 - (2\kappa + \lambda + 1)x - 3\kappa - \lambda + 1 = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες το άθροισμά τους είναι 4 και το γινόμενο τους είναι -4.

α. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

β. Για τις παραπάνω τιμές των λ, μ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που

διέρχεται από τα σημεία $A\left(x_1 x_2, \frac{x_1^2 + x_2^2}{24}\right)$ και $B\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, x_1 + x_2\right)$.

α. Είναι: $x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{-(2\kappa + \lambda + 1)}{2} = 4 \Leftrightarrow 2\kappa + \lambda + 1 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa + \lambda = 7 \quad (1)$$

$$\text{Και } x_1 \cdot x_2 = -4 \Leftrightarrow \frac{-3\kappa - \lambda + 1}{2} = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\kappa - \lambda + 1 = -8 \Leftrightarrow 3\kappa + \lambda = 9 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1),(2):

ΜΕΘΟΔΟΣ

Από τους τύπους του Vieta γνωρίζουμε ότι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\begin{cases} 2\kappa + \lambda = 7 \\ 3\kappa + \lambda = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa + \lambda = 7 \\ -3\kappa - \lambda = -9 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 2\kappa + \lambda = 7 \\ -\kappa = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 + \lambda = 7 \\ \kappa = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \kappa = 2 \end{cases}$$

β. Γνωρίζουμε ότι: $x_1 \cdot x_2 = -4$ και $x_1 + x_2 = 4$

Θα προσδιορίσουμε τις παραστάσεις: $x_1^2 + x_2^2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Ισχύει ότι:

$$\star (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow 4^2 = x_1^2 + 2 \cdot (-4) + x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 = x_1^2 - 8 + x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 24$$

$$\star \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{4}{-4} = -1$$

Άρα τα σημεία Α, Β έχουν συντεταγμένες: Α(-4,1) και Β(-1,4)

Έστω $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας. Επειδή η (ε) διέρχεται από τα σημεία Α και Β, αυτά την επαληθεύουν. Τότε:

$$A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 1 = -4\alpha + \beta \quad (1) \quad \text{και} \quad B \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 4 = -\alpha + \beta \quad (2)$$

$$\text{Είναι: } \begin{cases} -4\alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 + 4\alpha \\ -\alpha + 1 + 4\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 + 4\alpha \\ 3\alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι: $\varepsilon: y = x + 5$

1.1.13. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14.

Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, παίρνουμε έναν αριθμό μικρότερου του αρχικού κατά 18. Να προσδιορίσετε τον αρχικό αριθμό.

Έστω $A = xy$ ο αριθμός που ψάχνουμε για τον οποίο ισχύει ότι $0 \leq x \leq 9$ και $0 \leq y \leq 9$.

Ο αριθμός xy γράφεται στη μορφή $10x + y$

Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού xy

είναι 14, οπότε ισχύει $x + y = 14 \quad (1)$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν X και y τα διαδοχικά ψηφία ενός διψήφιου αριθμού, ο αριθμός είναι $10x + y$

Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του αριθμού $A = xy$ προκύπτει ο αριθμός $B = yx$ ο οποίος είναι $10y + x$

Επειδή ο αριθμός B είναι μικρότερος του αριθμού A κατά 18, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} B = A - 18 &\Leftrightarrow 10y + x = 10x + y - 18 \Leftrightarrow 10x - x - 10y + y = 18 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9x - 9y = 18 \Leftrightarrow x - y = 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x + y = 14 \\ 2x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 8 \end{cases}$$

Τελικά ο ζητούμενος αριθμός $A = xy$ είναι ο 86.

1.1.14. Εκτελώντας τη διαίρεση δύο αριθμών, του Δ και του δ , βρίσκουμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 1. Στη συνέχεια προσθέτοντας τον αριθμό 8 στους Δ και δ , εκτελούμε πάλι τη διαίρεση βρίσκοντας αυτή τη φορά πηλίκο 1 και υπόλοιπο 7. Να βρεθούν οι δύο αριθμοί Δ και δ .

Από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \text{ έχουμε } \Delta = \delta \cdot 3 + 1 \quad (1) \text{ και}$$

$$\Delta + 8 = (\delta + 8) \cdot 1 + 7 \Leftrightarrow \Delta + 8 = \delta + 8 + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \delta + 7 \quad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \Delta = 3\delta + 1 \\ \Delta = \delta + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta + 7 = 3\delta + 1 \\ \Delta = \delta + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\delta = 6 \\ \Delta = \delta + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 3 \\ \Delta = 10 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν Δ είναι ο διαιρετέος, δ είναι ο διαιρέτης, π είναι το πηλίκο και υ το υπόλοιπο μιας ευκλείδειας διαίρεσης, ισχύει:
 $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$

1.1.15. Δύο κουμπαράδες Α και Β έχουν μαζί 45 ευρώ. Αν στον Α προσθέσουμε 5 ευρώ και στον Β προσθέσουμε 10 ευρώ τότε ο Β θα έχει τριπλάσια χρήματα από τον Α. Να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο κάθε κουμπαράς πριν τοποθετήσουμε τα χρήματα.

Έστω x τα χρήματα που είχε ο κουμπαράς Α και y τα χρήματα που είχε ο κουμπαράς Β.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε το σύστημα } \begin{cases} x + y = 45 \\ 3(x + 5) = y + 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 - y \\ 3x + 15 = y + 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 - y \\ 3(45 - y) + 5 = y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 - y \\ 135 - 3y + 5 = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 - y \\ 4y = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 - y \\ y = 35 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 35 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα ο κουμπαράς Α είχε 10 ευρώ και ο Β 35 ευρώ.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν έχουμε να επιλύσουμε πρόβλημα με δύο αγνώστους, θεωρούμε τους αγνώστους x και y και από τα δεδομένα δημιουργούμε σύστημα με αγνώστους τα x και y . Η λύση του συστήματος μας οδηγεί στη λύση του προβλήματος.

1.1.16. Για δύο θετικούς αριθμούς ισχύει ότι η διαφορά του τριπλάσιου του μικρότερου από το διπλάσιο του μεγαλύτερου είναι 40 και η διαίρεση του μεγαλύτερου με το μικρότερο δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 10. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Έστω $x > y > 0$ οι δύο ζητούμενοι θετικοί αριθμοί. Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ x = 2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y + 10) - 3y = 40 \\ x = 2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 20 - 3y = 40 \\ x = 2y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 50 \end{cases}$$

Επομένως οι αριθμοί είναι οι $x = 50$ και $y = 20$.

1.1.17. Ένα ξενοδοχείο έχει 26 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα και συνολικά 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

Αν x είναι ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων,

$$\begin{aligned} \text{τότε από τα δεδομένα έχουμε } \begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 - y \\ 2(26 - y) + 3y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 - y \\ 52 - 2y + 3y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 16 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν 10 δίκλινα και 16 τρίκλινα δωμάτια.

1.1.18. Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5€ και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4€. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050€. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

Αν τον αγώνα παρακολούθησαν x παιδιά και y ενήλικες τότε από τα δεδομένα

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } \begin{cases} x + y = 2200 \\ 1,5x + 4y = 5050 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2200 - x \\ 1,5x + 4(2200 - x) = 5050 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2200 - x \\ 1,5x + 8800 - 4x = 5050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2200 - x \\ -2,5x = -3750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1500 \\ y = 700 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα τον αγώνα παρακολούθησαν 1500 παιδιά και 700 ενήλικες.

1.1.19. Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T μπορεί να βρεθεί με τον τύπο $R = \alpha T + \beta$. Αν στους 20°C η αντίσταση ήταν $0,4\Omega$ και στους 80°C η αντίσταση ήταν $0,5\Omega$, να βρείτε τα α και β .

Αφού για $T = 20$ είναι $R = 0,4$, έχουμε $0,4 = \alpha \cdot 20 + \beta \Leftrightarrow 20\alpha + \beta = 0,4$ (1)

Αφού για $T = 80$ είναι $R = 0,5$, έχουμε $0,5 = 80\alpha + \beta \Leftrightarrow 80\alpha + \beta = 0,5$ (2)

Έτσι έχουμε το σύστημα
$$\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0,4 \\ 80\alpha + \beta = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha + \beta = 0,4 \\ -80\alpha - \beta = -0,5 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha + \beta = 0,4 \\ -60\alpha = -0,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha + \beta = 0,4 \\ \alpha = \frac{0,1}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 \cdot \frac{1}{600} + \beta = 0,4 \\ \alpha = \frac{1}{600} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{30} + \beta = \frac{4}{10} \\ \alpha = \frac{1}{600} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{4}{10} - \frac{1}{30} \\ \alpha = \frac{1}{600} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{600} \\ \beta = \frac{11}{30} \end{cases}.$$

Άρα $R = \frac{1}{600} \cdot T + \frac{11}{30}$

1.1.20. Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε

να πάρει 100ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;

Αν απαιτούνται x ml από το πρώτο διάλυμα και y ml από το δεύτερο διάλυμα, τότε $x + y = 100$. (1)

Η ποσότητα του υδροχλωρικού οξέως σε κάθε διάλυμα είναι $\frac{50}{100}x$ στο πρώτο και $\frac{80}{100}y$ στο δεύτερο. Επομένως $\frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100$ (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) ορίζουν το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ 5x + 8y = 680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 100 - x \\ 5x + 8y = 680 \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } 5x + 8(100 - x) = 680 \Leftrightarrow 5x + 800 - 8x = 680 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 8x = 680 - 800 \Leftrightarrow -3x = -120 \Leftrightarrow x = 40 \text{ οπότε } y = 60.$$

Άρα πρέπει να αναμείξει 40 ml από το πρώτο με 60 ml από το δεύτερο.

1.1.21. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + 4y = 3$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_2 .

β. Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;

γ. Για ποιες τιμές της παραμέτρου α οι ευθείες είναι παράλληλες;

α. Είναι $\varepsilon_1 : 2x + 4y = 3 \Leftrightarrow 4y = -2x + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{4}x + \frac{3}{4}. \text{ Άρα } \lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

Και $\varepsilon_2 : x + 2y = \alpha \Leftrightarrow 2y = -x + \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2}. \text{ Άρα } \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας επιλύουμε την εξίσωση της ως προς y . Ο συντελεστής του x είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

β. Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$, οι ευθείες ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.
Αρα δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες τέμνονται.

γ. Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν

$$\frac{3}{4} \neq \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 4\alpha \neq 6 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{2}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν δύο ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Δύο ευθείες που είναι της μορφής $\varepsilon_1: y = ax + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = ax + \beta_2$, είναι παράλληλες όταν $\beta_1 \neq \beta_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

1.1.22. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α.** Τι ονομάζουμε γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;
- β.** Πως ερμηνεύεται γεωμετρικά μία λύση ενός συστήματος;
- γ.** Πότε ένα σύστημα είναι αδύνατο και πως ερμηνεύεται γεωμετρικά;
- δ.** Πότε ένα σύστημα έχει άπειρες λύσεις και πως ερμηνεύεται γεωμετρικά;

1.1.23. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

- α.** Η εξίσωση $\sqrt{2}x - 0y + 1 = 5$ είναι γραμμική.
- β.** Η εξίσωση $x - y - 2 = 0$ επαληθεύεται από άπειρα ζεύγη αριθμών (x, y) .
- γ.** Το ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0, 0)$.
- δ.** Ένα γραμμικό σύστημα 2×2 γίνεται να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

ε. Το σύστημα $\begin{cases} x - y = -1 \\ -3x + 3y = 3 \end{cases}$ είναι αόριστο και για αυτό επαληθεύεται για

κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

στ. Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει πάντα μία λύση.

ζ. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει λύσεις τις $(1,1)$ και $(-2,3)$ τότε έχει άπειρες λύσεις.

η. Ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο.

θ. Τα συστήματα $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ και $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ είναι ισοδύναμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.1.24. Να εξετάσετε ποια από τα ζεύγη $(1,2)$, $(0,-3)$ και $(\alpha, -2\alpha + 3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 3$.

1.1.25. Δίνεται η γραμμική εξίσωση $\alpha x + (\alpha - 2)y = 2$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν το ζεύγος $(1, -2)$ είναι λύση της εξίσωσης τότε:

α. Να βρείτε τον αριθμό α .

β. Να σχεδιάσετε την ευθεία που παριστάνει η εξίσωση.

1.1.26. Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 3x + 5y = -3 \\ 4x + y = 19 \end{cases}$

1.1.27. Να λύσετε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

1.1.28. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} y + 3 = 1 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 2y = 20 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x + y = 3,8 \\ x - y = 3,2 \end{cases}$$

1.1.29. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 0,4x - 0,6y = -\frac{1}{5} \\ \frac{2x-1}{3} + \frac{1-5y}{2} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

α. Με τη μέθοδο της αντικατάστασης

β. Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

1.1.30. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 0,3x + 0,1y = \frac{1}{2} \\ \frac{2x-y}{3} + \frac{2y-x}{2} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{y}{6} \end{cases}$$

1.1.31. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y}{2} = 3 + x \\ -5(x+1) = 6(y+1) \end{cases}$$

1.1.32. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{2x+3y}{x-y} = -1 \\ -0,3y + 0,2x = 2,6 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} \frac{x+1}{y} = \frac{x}{y+1} \\ \frac{x+1}{2} - \frac{y-2}{17} = \frac{x-y+2}{3} \end{cases}$$

1.1.33. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x = 2 \\ y + x = 5 \end{cases}$

β. $\begin{cases} y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

1.1.34. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τα σημεία:

α. $A(-1, 4)$ και $B(2, 3)$

β. $A(-2, 5)$ και $B(2, 0)$

1.1.35. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(2, 4)$. Στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ), που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1 και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

1.1.36. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3(x + y) - (x - y) = 7 \\ 5(x - y) + (x + y) = 14 \end{cases}$

1.1.37. Αν η εξίσωση $(4\lambda^2 - 9)x = 2\lambda - 3$ είναι ταυτότητα, να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και να βρείτε.

1.1.38. Αν το σύστημα $\begin{cases} 2\alpha x - 3y = \beta - 5 \\ 3x + \alpha y = 5\beta \end{cases}$ έχει λύση την $(x, y) = (1, 2)$ να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.1.39. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση: $(\alpha - 2\beta - 1)x + (2\alpha - \beta - 5)y + \alpha - 1 = 0$ να παριστάνει ευθεία.

1.1.40. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\kappa - 2\lambda - 1)x - 3\kappa + \lambda = 0$. Αν το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι διπλάσιο από το άθροισμα των ριζών και οι αριθμοί κ, λ

είναι αντίθετοι, τότε να δείξετε ότι $\kappa=1$ και $\lambda=-1$.

1.1.41. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(x+4)\alpha + (\beta-2)x = 3 + \beta$ με άγνωστο τον x να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.1.42. Πριν 16 χρόνια ο Α είχε διπλάσια ηλικία από τον Β. Μετά από 11 χρόνια ο Β θα έχει τα $\frac{4}{5}$ της ηλικίας του Α. Βρείτε τις ηλικίες τους σήμερα.

1.1.43. Μια ομάδα μαθητών έγραψε σ' ένα μάθημα διαγώνισμα που έχει 20 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση ο μαθητής έπαιρνε 5 μονάδες ενώ για κάθε λάθος απάντηση έχανε 3 μονάδες. Ένας μαθητής έγραψε 52 μονάδες σ' αυτό το διαγώνισμα. Βρείτε πόσες απαντήσεις του ήταν σωστές και πόσες λάθος.

1.1.44. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 28cm . Αυξάνουμε ταυτόχρονα την μία πλευρά κατά 2cm και την άλλη κατά 1cm και το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 24cm^2 . Να βρείτε τις αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου.

1.1.45. Ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και το διάστημα S σε m που διανύει σε κάθε χρονική στιγμή t σε sec δίνεται από την συνάρτηση $S(t) = \alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t$.

α. Αν σε χρόνο 5sec το σώμα έχει διανύσει 40m ενώ σε χρόνο 7sec έχει διανύσει 70m βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β. Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα έχει διανύσει 10m;

1.1.46. Ένα διάλυμα περιέχει 20% αλκοόλη και ένα άλλο διάλυμα 70%. Πόσα λίτρα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξουμε για να πάρουμε 100 λίτρα

διαλύματος που να περιέχει 60% αλκοόλη;

1.1.47. Δύο φίλοι, ο Α και ο Β, έχουν ηλικίες (σε έτη) x και y αντίστοιχα. Οι ηλικίες τους έχουν άθροισμα 42 χρόνια.

α. Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός;

β. Να εκφράσετε το y συναρτήσει του x και να κάνετε τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης;

γ. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 6 χρόνια, να υπολογίσετε τις ηλικίες των δύο φίλων;

1.1.48. Πριν από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα ήταν πενταπλάσια από την ηλικία του υιού του. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία του υιού του. Ποια είναι σήμερα η ηλικία του πατέρα και ποια του υιού;

1.1.4. Λύση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2x2

$$\text{Έστω } \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Ορίζουμε $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ και την ονομάζουμε **ορίζουσα του**

συστήματος.

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D , αν στη θέση των συντελεστών του x

θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με : $D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$ και

Ομοίως, την ορίζουσα που προκύπτει από την D , αν στη θέση των συντελεστών

του y θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με : $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$

Διερεύνηση:

☀ Αν $D \neq 0$ έχει μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

☀ Αν $D = 0$ είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Έτσι για να λύσουμε ένα παραμετρικό σύστημα, ακολουθούμε την εξής

διαδικασία:

- ✦ Βρίσκουμε, τα D , D_x , D_y και τα παραγοντοποιούμε
- ✦ Ελέγχουμε μήπως $D \neq 0$ ή βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου που πρέπει να εξαιρεθούν για να ισχύει $D \neq 0$, οπότε το σύστημα θα έχει μοναδική λύση.
- ✦ Για τις τιμές της παραμέτρου που έχουμε $D = 0$, αντικαθιστούμε την τιμή της παραμέτρου στο σύστημα και λύνοντάς το με αντικατάσταση ή με αντίθετους συντελεστές βρίσκουμε ότι το σύστημα θα είναι αδύνατο ή αόριστο.

Παράδειγμα:

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 2 \end{cases}$$

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε τις ορίζουσες D , D_x , D_y και τις παραγοντοποιούμε.

Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda + 2) - \lambda = \lambda^2 + 2\lambda - \lambda = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- ✦ Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$, το σύστημα έχει μοναδική

$$\text{λύση την } x = \frac{D_x}{D} = \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

- ✦ Αν $D = 0$ δηλαδή αν $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$ έχουμε

⇒ Για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ αδύνατο}$$

⇒ Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x - 1$ και έχει άπειρες λύσεις

της μορφής $(x, y) = (k, k - 1), k \in \mathbb{R}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1.49. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\alpha. \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

α. Έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 7 - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$$

Επομένως το σύστημα έχει την μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Υπολογίζουμε τις 3 ορίζουσες D, D_x, D_y και διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

☀ $D \neq 0$ (το σύστημα έχει μοναδική λύση)

☀ $D = 0$ (το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο)

β. Το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

Είναι $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11$, $D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22$ και

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$

Επομένως το σύστημα έχει την μοναδική λύση:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1$

1.1.50. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε:

α. $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 6x + 7y = 100 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases}$

α. Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0$ κι άρα

το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β. Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$. Το

σύστημα γράφεται:

$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$

κι επομένως έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

γ. Είναι $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$. Το σύστημα γράφεται:

ΜΕΘΟΔΟΣ

Υπολογίζουμε τις 3 ορίζουσες D , D_x , D_y και διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

☀ $D \neq 0$ (το σύστημα έχει μοναδική λύση)

☀ $D = 0$ (το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο)

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ και είναι αδύνατο.}$$

1.1.51. Να λύσετε τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3}+1)y = -1-\sqrt{3} \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ \frac{1}{2} + (\sqrt{3}-1)y = 1 \end{cases}$$

α. Είναι: $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix} =$
 $= (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) - 2 = 2 - 2 = 0$

Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3}+1)y = -1-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ (\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)y = -(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Υπολογίζουμε τις 3 ορίζουσες D , D_x , D_y και διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

☀ $D \neq 0$ (το σύστημα έχει μοναδική λύση)

☀ $D = 0$ (το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο)

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } (\sqrt{3}-1)x + 2y &= -2 \Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)x = -2y - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}-1}y - \frac{2}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)}y - \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} \Leftrightarrow x = -\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}y - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -(\sqrt{3}+1)y - (\sqrt{3}+1) \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$(x, y) = (-(\sqrt{3}+1)\kappa - (\sqrt{3}+1), \kappa), \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

$$\beta. \text{ Είναι: } D = \begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{Το σύστημα γράφεται } \begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ x + 2(\sqrt{3}-1)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ (\sqrt{3}+1)x + 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)y = 2(\sqrt{3}+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ (\sqrt{3}+1)x + 4y = 2(\sqrt{3}+1) \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

1.1.52. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + \lambda y = \mu \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2\mu \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \mu \end{vmatrix} = \mu + 1$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

☀ Αν $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ τότε $D \neq 0$ οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

ΜΕΘΟΔΟΣ

Υπολογίζουμε τις 3 ορίζουσες D, D_x, D_y και διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

☀ $D \neq 0$ (το σύστημα έχει μοναδική λύση)

☀ $D = 0$ (το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο)

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda - 2} \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{\mu + 1}{\lambda - 2}$$

☀ Αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ το σύστημα γράφεται $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = -\mu \end{cases}$. Άρα:

✦ Αν $\mu \neq -1$ το σύστημα είναι αδύνατο.

✦ Αν $\mu = -1$ το σύστημα γράφεται: $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 1 \Leftrightarrow x = 2y + 1$

Επομένως το σύστημα έχει οι άπειρες λύσεις της μορφής: $(x, y) = (2y + 1, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Τελικά:

⇒ Αν $\lambda \neq 2$ το σύστημα έχει μοναδική λύση $x = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda - 2}$ και $y = \frac{\mu + 1}{\lambda - 2}$

⇒ Αν $\lambda = 2$ και $\mu \neq -1$ το σύστημα είναι αδύνατο.

⇒ Αν $\lambda = 2$ και $\mu = -1$ το σύστημα έχει οι άπειρες λύσεις της μορφής: $(x, y) = (2y + 1, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

1.1.53. Να λυθεί και να διερευνηθεί το $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = \lambda^4 \end{cases}$ για κάθε τιμή της

παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 1(-1) = -\lambda^2 + 1 =$$

$$= -(\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -1 \\ \lambda^4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda) - \lambda^4(-1) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^4 = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$$

$$\text{Και } D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^4 \end{vmatrix} = \lambda^5 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 - 1) =$$

$$= \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

Έτσι:

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν έχουμε να επιλύσουμε παραμετρικό σύστημα, υπολογίζουμε τις 3 ορίζουσες D , D_x , D_y και διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

☀ $D \neq 0$ (το σύστημα έχει μοναδική λύση)

☀ $D = 0$ (το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο)

☀ Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ το σύστημα έχει

$$\text{μοναδική λύση την } x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^3(\lambda - 1)}{-(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = -\frac{\lambda^3}{\lambda + 1} \text{ και}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)}{-(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = -\frac{\lambda^2(\lambda^2 + \lambda + 1)}{\lambda + 1}$$

☀ Αν $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y + 1$ που προφανώς έχει

άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (y + 1, y), y \in \mathbb{R}$.

☀ Αν $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x - y = 1^{(+)} \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 = 2$ κι επομένως το

σύστημα είναι αδύνατο.

1.1.54. Να βρείτε τις τιμές $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα συστήματα $\begin{cases} (\kappa - 1)x + \lambda y = 1 \\ \kappa x + (\lambda + 1)y = 2 \end{cases}$

και $\begin{cases} x + (\kappa - \lambda)y = -1 \\ 2x + (\kappa + \lambda)y = 2 \end{cases}$ να είναι συγχρόνως αδύνατα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να είναι συγχρόνως αδύνατα δύο συστήματα, θα πρέπει να έχουν τις ορίζουσές τους μηδέν. Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή αφού ένα σύστημα που έχει $D = 0$, μπορεί να έχει άπειρες λύσεις. Άρα πρέπει να εξετάσουμε αν όντως τα

συστήματα με $D_1 = D_2 = 0$
γίνονται συγχρόνως αδύνατα.

Για να είναι συγχρόνως αδύνατα πρέπει:

$$D_1 = 0 \text{ και } D_2 = 0$$

$$\text{Είναι: } D_1 = \begin{vmatrix} \kappa - 1 & \lambda \\ \kappa & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\kappa - 1)(\lambda + 1) - \kappa\lambda =$$

$$= \kappa\lambda - \lambda + \kappa - 1 - \kappa\lambda = \kappa - \lambda - 1$$

$$\text{και } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \kappa - \lambda \\ 2 & \kappa + \lambda \end{vmatrix} = \kappa + \lambda - 2\kappa + 2\lambda = -\kappa + 3\lambda$$

$$\text{Τότε: } \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa - \lambda - 1 = 0^{(+)} \\ -\kappa + 3\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 1 = 0 \\ \kappa = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \kappa = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Για $\kappa = \frac{3}{2}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ τα συστήματα γίνονται:

$$\Sigma_1: \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \text{ αδύνατο}$$

$$\text{και } \Sigma_2: \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ αδύνατο}$$

Άρα για $\kappa = \frac{3}{2}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ τα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα.

1.1.55. Αν σ' ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ισχύει $(D-1)^2 + |D_x - 3| + \sqrt{D_y + 2} = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία και να βρεθεί.

Η ισότητα $(D-1)^2 + |D_x - 3| + \sqrt{D_y + 2} = 0$
ισχύει μόνο όταν $D-1=0$ και $D_x - 3 = 0$
και $D_y + 2 = 0$.

Άρα $D=1 \neq 0$, $D_x = 3$ και $D_y = -2$ κι
έτσι το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{D_x}{D} = 3 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = -2.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν έχουμε άθροισμα μη αρνητικών αριθμών ίσο με το μηδέν τότε θα πρέπει όλοι οι αριθμοί να είναι ίσοι με το μηδέν.

1.1.56. Δίνεται ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y που έχει μοναδική λύση ενώ ακόμα ισχύει, $|D_x - D_y - 3D| + |2D_x + 3D_y + 4D| = 0$. Να βρεθεί η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος.

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση θα είναι $D \neq 0$ και για τη μοναδική λύση του συστήματος θα είναι $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$. Είναι:

$$\begin{aligned} |D_x - D_y - 3D| + |2D_x + 3D_y + 4D| &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow D_x - D_y - 3D &= 0 \text{ και } 2D_x + 3D_y + 4D = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{D_x}{D} - \frac{D_y}{D} - \frac{3D}{D} &= 0 \text{ και } \frac{2D_x}{D} + \frac{3D_y}{D} + \frac{4D}{D} = 0 \\ \Leftrightarrow x - y &= 3 \text{ και } 2x + 3y = 4 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 2(3 + y) + 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 6 + 2y + 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 5y = -10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν έχουμε άθροισμα απολύτων τιμών ίσο με το μηδέν τότε θα πρέπει όλες οι απόλυτες τιμές να είναι ίσες με το μηδέν. Δηλαδή:
 $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1, -2)$

1.1.57. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 .

α. Αν $D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D - 4D_x + 2D_y = -6$ δείξτε ότι έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (2, -1)$.

β. Αν $D = D_x + D_y$ και $x - y = 1$ και έχει μοναδική λύση τότε να βρεθεί η μοναδική λύση.

α. Έχουμε:

$$\begin{aligned} D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D - 4D_x + 2D_y + 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow D^2 - 2D + D_x^2 - 4D_x + D_y^2 + 2D_y + 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow D^2 - 2D + 1 + D_x^2 - 4D_x + 4 + D_y^2 + 2D_y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (D-1)^2 + (D_x-2)^2 + (D_y+1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow D=1 \text{ και } D_x=2 \text{ και } D_y=-1 \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προσπαθούμε με συμπλήρωση τετραγώνων να δημιουργήσουμε ταυτότητες.
Είναι $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$

Επομένως έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = (2, -1)$

β. Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση, είναι $D \neq 0$.

Άρα $D = D_x + D_y \Leftrightarrow \frac{D}{D} = \frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} \Leftrightarrow x + y = 1$. Επίσης ισχύει ότι $x - y = 1$

Λύνουμε το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y + 1 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Επομένως η μοναδική λύση είναι $(x, y) = (1, 0)$

1.1.58. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων ισχύει: $D = D_x - D_y$.

α. Να δείξτε ότι αν το σύστημα είναι ομογενές έχει άπειρες λύσεις.

β. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x, y) , να δείξετε ότι:

$$x^2 - y^2 = \frac{D_x + D_y}{D}$$

α. Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους x, y έχει πάντα $D_x = D_y = 0$. Οπότε $D = D_x - D_y = 0$ κι επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Στο ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \alpha' x + \beta' y = 0 \end{cases} \text{ είναι}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \beta' \end{vmatrix} = 0 \text{ και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

β. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση πρέπει $D \neq 0$ οπότε η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$D = D_x - D_y \Leftrightarrow \frac{D}{D} = \frac{D_x}{D} - \frac{D_y}{D} \Leftrightarrow 1 = x - y \quad (1)$$

$$\text{Τότε: } x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \stackrel{(1)}{=} x + y = \frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} = \frac{D_x + D_y}{D}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν ένα σύστημα 2×2 έχει μοναδική λύση, θα είναι $D \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

1.1.59. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

α. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ισχύει $|D| + |D_y| \neq 0$ και $|D_x| = 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ισχύει $|D - 1| + (D_x - 1)^2 + |D_y - 1|^2 = 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (1, 1)$.

γ. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ισχύει $D_x + D_y = 2$, τότε αυτό μπορεί να είναι αδύνατο.

δ. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει ως λύση την $(x, y) = (0, 0)$ τότε αυτό είναι ομογενές.

ε. Αν $|D - 1| + |2 - 2D|^2 = 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

στ. Αν $D = \lambda - 1$ και $D_x = \lambda + 2$ τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ζ. Αν δύο γραμμικά συστήματα 2×2 έχουν ίσες ορίζουσες, τότε έχουν και το ίδιο πλήθος λύσεων.

η. Αν ένα ομογενές γραμμικό σύστημα 2×2 έχει ως λύση την $(x, y) = (-1, 1)$ τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

θ. Αν για ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους τα x, y ισχύει $D \neq 0$ και $D - D_x + D_y = 0$, τότε τα x, y επαληθεύουν την εξίσωση $x - y = 1$.

ι. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ισχύει $|D| + |D_x| + |D_y - 1| = 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

ια. Αν η ορίζουσα ενός συστήματος 2×2 είναι ίση με το μηδέν και έχει μία λύση, τότε έχει άπειρες λύσεις.

ιβ. Σε ένα σύστημα 2×2 που περιέχει μία παράμετρο λ βρίσκουμε $D = \lambda^2 + 3\lambda + 4$. Τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

ιγ. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους τα x, y έχει λύση $x = 2$ και $y = -1$, τότε $D_x + 2D_y = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.1.60. Να αποδείξετε ότι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \kappa\beta & \beta \\ \gamma + \kappa\delta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma + \lambda\alpha & \delta + \lambda\beta \end{vmatrix}$

1.1.61. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\begin{vmatrix} 10 & \sqrt{10x} \\ \sqrt{10x} & x \end{vmatrix} = 0$ **β.** $\begin{vmatrix} 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{11} - 2x \end{vmatrix} = 0$

1.1.62. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τις εξισώσεις:

α. $\begin{vmatrix} \lambda x & \lambda^2 - \lambda \\ 4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$ **β.** $\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda + 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = -\lambda - 1$

1.1.63. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\begin{vmatrix} x-1 & 2x-4 \\ x+2 & 2x \end{vmatrix} \geq 0$ **β.** $\begin{vmatrix} 2x & x-4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ -x & x+2 \end{vmatrix}$

1.1.64. Αν ισχύει $\begin{vmatrix} 4\alpha^2 + \beta^2 + 1 & \alpha + \beta - 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.1.65. Αν ισχύει $\begin{vmatrix} \alpha\gamma & -4\beta\sqrt{x} \\ \frac{1}{4\gamma\sqrt{x}} & \frac{1}{\gamma^2} \end{vmatrix} = -1$ με $\gamma \neq 0$ και $x > 0$ να δείξετε ότι

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$$

1.1.66. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 7y = \lambda + 1 \\ \lambda x + \lambda y = 5 \end{cases}$ είναι :

α. Αδύνατο

β. Αόριστο

1.1.67. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 4 + y \\ \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{vmatrix} = -2 \end{cases}$$

1.1.68. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των συστημάτων με τη βοήθεια των οριζουσών:

α.
$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

1.1.69. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των συστημάτων με τη βοήθεια των οριζουσών:

α.
$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ 2x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ -2\lambda x + 2y = 1 \end{cases}$$

1.1.70. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda^2 x + \lambda y = \lambda \\ (\lambda - 1)x + (\lambda - 1)y = 1 \end{cases}$$

α. Να έχει άπειρες λύσεις,

β. Να είναι αδύνατο.

1.1.71. Να βρείτε τους αριθμούς $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x - y = -1 \\ (\lambda - 2)x + 2y = \kappa \end{cases}$$
 είναι αόριστο.

1.72. Να βρείτε τους αριθμούς $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το σύστημα

$$\begin{cases} x + \kappa y = \lambda \\ 2x + (\lambda + 1)y = 6 \end{cases}$$
 έχει άπειρες λύσεις και τις λύσεις του συστήματος.

1.1.73. Να λύσετε τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x - \beta y = \alpha \\ x - \alpha y = \beta \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 2\alpha\beta \\ \beta x + \alpha y = \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

1.1.74. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ \lambda x + 4y = 5 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + y = 2\lambda \end{cases}$$

1.1.75. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha^2 x + (2 - \alpha)y = \alpha^3 + 4 \\ \alpha x + (2\alpha - 1)y = \alpha^5 - 2 \end{cases}$$

α. Είναι αδύνατο,

β. Έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις. Να βρείτε τις λύσεις αυτές.

1.1.76. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - y = \lambda - 3 \\ 2x + 3y = \lambda + 4 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Να υπολογίσετε τα x, y .

γ. Για ποια τιμή του λ η λύση (x, y) που βρήκατε επαληθεύει τη σχέση $x + y = 3$;

1.1.77. Να βρεθούν τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε τα συστήματα $(\Sigma_1) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ \mu x + \lambda y = 1 \end{cases}$ και

$(\Sigma_2) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -\mu x + (\lambda + 1)y = 2 \end{cases}$ να είναι συγχρόνως αδύνατα.

1.1.78. Δίνονται τα συστήματα $(\Sigma_1) \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + \lambda y = 2 \end{cases}$ και $(\Sigma_2) \begin{cases} 2x - \lambda y = 8 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$. Αν το

(Σ_1) είναι αδύνατο, να δείξετε ότι το (Σ_2) είναι αόριστο

1.1.79. Αν το σύστημα $\Sigma_1: \begin{cases} (\kappa-1)x+3y=-3 \\ 2x+\kappa y=2 \end{cases}$ είναι αδύνατο, να αποδείξετε ότι

το σύστημα $\Sigma_2: \begin{cases} (\kappa-2)x+(\kappa+2)y=2\kappa \\ 2x+(\kappa+7)y=4\kappa \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

1.1.80. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=3\lambda-3 \\ x+y=-\lambda^2+2\lambda \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος, να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η παράσταση $6x_0 + 3y_0$ γίνεται μέγιστη.

1.1.81. Δίνονται οι εξισώσεις $(\kappa-1)x-4y=\kappa+3$ και $\kappa x+(\kappa-1)y=1$.

α. Να αποδειχθεί ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες.

β. Να βρεθούν, για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, τα κοινά σημεία των δύο ευθειών.

1.1.82. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} 2x+3y=8 \\ x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} 2x+3y=8 \\ x+y=\lambda \\ x-y=-1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

1.1.83. Δίνεται το σύστημα των ευθειών: $\begin{cases} \varepsilon_1: 5x-2y=1 \\ \varepsilon_2: -3x+4y=5 \\ \varepsilon_3: 2x+4y=\lambda+1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε

το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι τρεις ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1.1.84. Σε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα είναι $8D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D(D_x - D_y)$

και $D \neq 0$. Να λυθεί το σύστημα.

1.1.85. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ισχύει $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D_y - 4D - 5$. Να λυθεί το σύστημα.

1.1.86. Σε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα είναι $D_x^2 + 4D_y^2 = 4D_x \cdot D_y$ και $D \neq 0$.
Αν $x + y = 3$, να βρείτε τα x, y .

1.1.87. Δίνεται ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y που έχει μοναδική λύση και για το οποίο ισχύουν $2x + y = 18$ και $D_x^2 + D_y^2 = 2D_x \cdot D_y$. Να βρείτε τη μοναδική του λύση.

1.1.88. Δίνεται ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y που έχει μοναδική λύση και για το οποίο ισχύουν $2D_x + D_y = 4D$ και $D_x + 3D_y = 7D$. Να βρείτε τη μοναδική του λύση.

1.1.5. Γραμμικό σύστημα 3x3

Μέθοδοι λύσης συστήματος

★ Αντικατάσταση

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- ⇒ Λύνουμε μια εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο.
- ⇒ Αντικαθιστούμε στις άλλες αυτόν τον άγνωστο.
- ⇒ Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει και βρίσκουμε τους δύο αγνώστους.
- ⇒ Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε και βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα:

$$\text{Να λύσετε το σύστημα } \begin{cases} x - y + \omega = -1 & (1) \\ 2x + 3y + \omega = 4 & (2) \\ -x - 2y + \omega = -4 & (3) \end{cases}$$

Λύση

☀ Λύνουμε κάποια από τις (1), (2), (3) ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο: (1) $\Rightarrow x = -1 + y - \omega$

☀ Προκύπτει σύστημα με τους άλλους δύο αγνώστους το οποίο λύνουμε:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (2) \Rightarrow 2(-1 + y - \omega) + 3y + \omega = 4 \\ (3) \Rightarrow -(-1 + y - \omega) - 2y + \omega = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 2y - 2\omega + 3y + \omega = 4 \\ 1 - y + \omega - 2y + \omega = -4 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} 5y - \omega = 6 \\ -3y + 2\omega = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 5y - 6 \\ -3y + 2(5y - 6) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 5y - 6 \\ -3y + 10y - 12 = -5 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \omega = 5y - 6 \\ 7y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 5 - 6 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

☀ Αντικαθιστώντας στην εξίσωση που λύσαμε, βρίσκουμε και τον τελευταίο άγνωστο: (1) $\Rightarrow x = -1 + 1 + 1 = 1$

Τελικά $(x, y, \omega) = (1, 1, -1)$

★ Αντίθετων συντελεστών

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ακολουθούμε τα εξής βήματα:

⇒ Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι. Επιλέγουμε και απαλείφουμε τον ίδιο άγνωστο από δύο εξισώσεις.

⇒ Προκύπτει σύστημα με δύο αγνώστους που κι εκεί απαλείφουμε κάποιον άγνωστο.

⇒ Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε και έτσι υπολογίζουμε σταδιακά και τους άλλους αγνώστους.

Παράδειγμα:

$$\text{Να λύσετε το σύστημα } \begin{cases} x + y - 3\omega = 0 & (1) \\ 2x - 3y + \omega = 2 & (2) \\ -3x + y + 2\omega = -3 & (3) \end{cases}$$

Λύση

☀ Σε δύο ζευγάρια εξισώσεων από τις (1), (2) και (3) απαλείφουμε τον ίδιο άγνωστο:

$$\begin{cases} (1) & x + y - 3\omega = 0 \\ (2) & 2x - 3y + \omega = 2 \end{cases} \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 6\omega = 0 \\ 2x - 3y + \omega = 2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε $-5y + 7\omega = 2$ (4)

$$\begin{cases} (1) & x + y - 3\omega = 0 \\ (3) & -3x + y + 2\omega = -3 \end{cases} \cdot (3) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y - 9\omega = 3 \\ -3x + y + 2\omega = -3 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$7y - 7\omega = 0 \Leftrightarrow y - \omega = 0 \quad (5)$$

☀ Έτσι προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) με αγνώστους y και ω :

$$\begin{cases} -5y + 7\omega = 2 \\ y - \omega = 0 \end{cases} \cdot (5) \Rightarrow \begin{cases} -5y + 7\omega = 2 \\ 5y - 5\omega = 0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε $2\omega = 2 \Leftrightarrow \omega = 1$

☀ Αντικαθιστώντας σε μία από τις προηγούμενες θα βρούμε το y :

$$y - \omega = 0 \Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

☀ Αντικαθιστώντας σε μία από τις αρχικές θα βρούμε το x :

$$x + y - 3\omega = 0 \Leftrightarrow x + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Τελικά $(x, y, \omega) = (2, 1, 1)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1.89. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4 \\ x - 3y + \omega = 2 \\ 3x - 2y + 2\omega = 2 \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} x + \frac{y}{2} - 2\omega = 3 \\ \frac{3x}{2} + y + \omega = 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases}$$

α. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$\omega = 3x - 2y - 11 \quad (1)$$

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

$$2x - 5y - 2(3x - 2y - 11) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5y - 6x + 4y + 22 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x - y = -19 \Leftrightarrow 4x + y = 19 \quad (2)$$

$$\text{Και } 5x + y - 2(3x - 2y - 11) = 33 \Leftrightarrow 5x + y - 6x + 4y + 22 = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x + 5y = 11 \Leftrightarrow x - 5y = -11 \quad (3)$$

Οι (2), (3) σχηματίζουν το 2x2 σύστημα: $\begin{cases} 4x + y = 19 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$ από τη λύση του οποίου

κατά τα γνωστά βρίσκουμε $x = 4$ και $y = 3$. Με αντικατάσταση των τιμών των x και y στην (1) βρίσκουμε $\omega = -5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x, y, \omega) = (4, 3, -5)$.

β. Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 3y - \omega + 2 \quad (4)$

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται $5(3y - \omega + 2) - y + 3\omega = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15y - 5\omega + 10 - y + 3\omega = 4 \Leftrightarrow 14y - 2\omega = -6 \Leftrightarrow 7y - \omega = -3 \quad (5)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να επιλύσουμε σύστημα 3×3 χρησιμοποιούμε τις μεθόδους της αντικατάστασης και των αντίθετων συντελεστών, όπως στα συστήματα 2×2 .

$$\begin{aligned} \text{Και } 3(3y - \omega + 2) - 2y + 2\omega = 2 &\Leftrightarrow 9y - 3\omega + 6 - 2y + 2\omega = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7y - \omega = -4 \quad (6) \end{aligned}$$

Οι (5),(6) σχηματίζουν το 2x2 σύστημα: $\begin{cases} 7y - \omega = -3 \\ 7y - \omega = -4 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

γ. Απαλείφουμε τους παρανομαστές και το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6 \\ 3x + 2y + 2\omega = 10 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases}$$

$$\text{Από την πρώτη εξίσωση έχουμε } y = 4\omega - 2x + 6 \quad (7)$$

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

$$\begin{aligned} 3x + 2(4\omega - 2x + 6) + 2\omega = 10 &\Leftrightarrow 3x + 8\omega - 4x + 12 + 2\omega = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Και } 5x + 3(4\omega - 2x + 6) - 2\omega = 16 &\Leftrightarrow 5x + 12\omega - 6x + 18 - 2\omega = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2 \quad (9) \end{aligned}$$

Οι (8), (9) αποτελούν το σύστημα $\begin{cases} x - 10\omega = 2 \\ x - 10\omega = 2 \end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις.

Είναι $x = 10\omega + 2$.

$$\text{Από την (7) έχουμε } y = 4\omega - 2(10\omega + 2) + 6 = -16\omega + 2.$$

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y, \omega) = (10\omega + 2, -16\omega + 2, \omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

1.1.90. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - y + \omega = 1 \\ 3y + \omega = 4 \\ 2\omega = -4 \end{cases}$

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} x - y + \omega = 1 & (1) \\ 3y + \omega = 4 & (2) \\ 2\omega = -4 & (3) \end{cases}$$

Από την εξίσωση (3) βρίσκουμε

$$2\omega = -4 \Leftrightarrow \omega = -2$$

Τότε από την (2) θα πάρουμε $3y + \omega = 4 \Leftrightarrow 3y - 2 = 4 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$

Τέλος από την (1) θα είναι $x - y + \omega = 1 \Leftrightarrow x - 2 - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 5$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y, \omega) = (5, 2, -2)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Το σύστημα αυτής της μορφής λέγεται κλιμακωτό και λύνεται διαδοχικά από την τελευταία εξίσωση προς την πρώτη.

1.1.91. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + y - \omega = 2 \\ -4x - 2y + 2\omega = -4 \\ 10x + 5y - 5\omega = 10 \end{cases}$$

Διαιρώντας την δεύτερη εξίσωση με το -2

και την τρίτη με το 5 θα πάρουμε:

$$\begin{cases} 2x + y - \omega = 2 \\ -4x - 3y + 3\omega = -6 \\ 10x + 5y - 5\omega = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - \omega = 2 \\ 2x + y - \omega = 2 \\ 2x + y - \omega = 2 \end{cases}$$

Έτσι θα είναι $2x + y - \omega = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 2x + \omega$

Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $(x, y, \omega) = (x, 2 - 2x + \omega, \omega)$, $x, \omega \in \mathbb{R}$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Από σύστημα με τρεις εξισώσεις, καταλήξαμε σε μία εξίσωση κι επομένως θα έχουμε άπειρες λύσεις που δίνονται από δύο ελεύθερους αγνώστους.

1.1.92. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - y + 2\omega = 0 \\ 4x + y + 12\omega = 0 \\ x + 3y - \omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \begin{cases} 3x - y + 2\omega = 0 & (1) \\ 4x + y + 12\omega = 0 & (2) \\ x + 3y - \omega = 0 & (3) \end{cases}$$

Απαλείφουμε το y από τις εξισώσεις (1) και (2)

προσθέτοντάς τις κατά μέλη:

$$7x + 14\omega = 0 \Leftrightarrow x + 2\omega = 0 \quad (4)$$

Απαλείφουμε το y από τις εξισώσεις (1) και (3):

$$\begin{cases} 3x - y + 2\omega = 0 \\ x + 3y - \omega = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 3y + 6\omega = 0 \\ x + 3y - \omega = 0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες εξισώσεις βρίσκουμε:

$$10x + 5\omega = 0 \Leftrightarrow 2x + \omega = 0$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5):

$$\begin{cases} x + 2\omega = 0 \\ 2x + \omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\omega \\ 2 \cdot (-2\omega) + \omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\omega \\ -3\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) τις τιμές των x, ω που βρήκαμε και έχουμε:

$$3 \cdot 0 - y + 2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Τελικά η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική $(x, y, \omega) = (0, 0, 0)$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Τα ομογενή συστήματα δεν είναι ποτέ αδύνατα. Είτε θα έχουν μοναδική λύση την μηδενική είτε θα έχουν άπειρες λύσεις.

1.1.93. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = -2 & (1) \\ y + \omega = 3 & (2) \\ \omega + x = 11 & (3) \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προφανώς θα μπορούσαμε να λύσουμε το σύστημα με τις τεχνικές που έχουμε αναπτύξει (αντικατάσταση ή απαλοιφή). Ακολουθήσαμε όμως μια

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1),(2),(3) και προκύπτει: $2x + 2y + 2\omega = 12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(x + y + \omega) = 12 \Leftrightarrow x + y + \omega = 6 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4), με τη βοήθεια της (1), γίνεται

$$-2 + \omega = 6 \Leftrightarrow \omega = 8$$

Ομοίως η (4) μέσω της (2) γίνεται

$$x + 3 = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

Τελικά από (4) και (3) προκύπτει ότι

$$y + 11 = 6 \Leftrightarrow y = -5.$$

Άρα η λύση είναι $(x, y, \omega) = (3, -5, 8)$

διαφορετική διαδικασία που μας οδηγεί ευκολότερα στη λύση.

1.1.94. Να βρείτε τριψήφιο αριθμό αν συμβαίνουν συγχρόνως τα παρακάτω:

⇒ Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 11

⇒ Ο αριθμός αυξάνεται κατά 9 αν εναλλάξουμε τη θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.

⇒ Ο αριθμός αυξάνεται κατά 180 αν εναλλάξουμε τη θέση των δύο πρώτων ψηφίων του.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν έχουμε να επιλύσουμε πρόβλημα με τρεις αγνώστους, θεωρούμε τους αγνώστους x , y και ω και από τα δεδομένα δημιουργούμε σύστημα με αγνώστους τα x , y και ω . Η

Έστω $xy\omega$ ο τριψήφιος αριθμός. Ο αριθμός μας είναι ο $100x + 10y + \omega$. Ισχύουν:

$$\begin{cases} x + y + \omega = 11 \\ 100x + 10\omega + y = 100x + 10y + \omega + 9 \\ 100y + 10x + \omega = 100x + 10y + \omega + 180 \end{cases} \Leftrightarrow$$

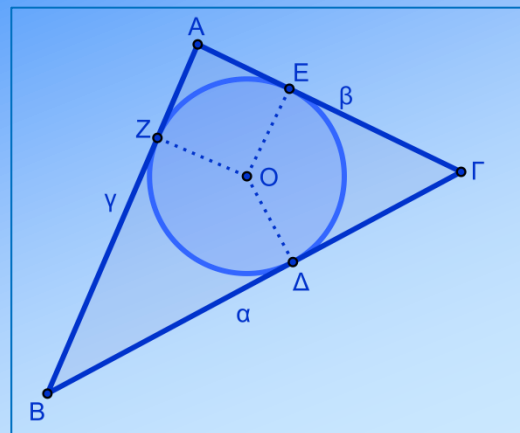
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \omega = 11 \\ 9\omega - 9y = 9 \\ 90y - 90x = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \omega = 11 \\ \omega - y = 1 \\ y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \omega = 11 \\ \omega = y + 1 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 + y + y + 1 = 11 \\ \omega = y + 1 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 12 \\ \omega = y + 1 \\ x = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ \omega = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα ο ζητούμενος τριψήφιος αριθμός είναι ο 245.

λύση του συστήματος μας οδηγεί στη λύση του προβλήματος.

1.1.95. Ο κύκλος εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου. Να υπολογίσετε, συναρτήσει των πλευρών α, β, γ του τριγώνου, τα τμήματα στα οποία χωρίζονται οι πλευρές από τα σημεία επαφής.



Έστω $x = AE = AZ$, $y = BZ = B\Delta$ και $\omega = \Gamma\Delta = \Gamma E$. Έχουμε:

$$AZ + ZB = \gamma \Leftrightarrow x + y = \gamma \quad (1)$$

$$B\Delta + \Delta\Gamma = \alpha \Leftrightarrow y + \omega = \alpha \quad (2)$$

$$\Gamma E + EA = \beta \Leftrightarrow \omega + x = \beta \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει $2x + 2y + 2\omega = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + y + \omega = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \quad (4)$$

Έτσι:

$$(4) - (1) \Rightarrow \omega = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \gamma \Rightarrow \omega = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$$

$$(4) - (2) \Rightarrow x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \alpha \Rightarrow x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$$

$$(4) - (3) \Rightarrow y = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \beta \Rightarrow y = \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.1.96. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y + 5\omega = 1 \\ 2y + 4\omega = 6 \\ 4\omega = -12 \end{cases}$$

1.1.97. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} -x + 2y + \omega = 8 \\ y = x + 5 \\ 3x - y - 4\omega = -3 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 2x + 4 = y + 4\omega \\ x + y = 2\omega - 5 \\ 5(x + y) = 2\omega - 13 \end{cases}$$

1.1.98. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + \omega = 2 \\ \omega + x = 3 \end{cases}$$

1.1.99. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x + \omega}{x + y} = 2 \\ \frac{y - x}{y - \omega} = \frac{5}{4} \\ \frac{x - 6}{y + \omega} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} 2x + 3y + 4\omega = 7 \\ \frac{x - y}{\omega - 1} = 2 \\ x = 2 - y - \omega \end{cases}$$

1.1.100. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} 2x - 3y - \omega = 0 \\ 6x - 13y - 6\omega = 0 \\ 4x - 2y + \omega = 0 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y + 5\omega = 0 \\ 3x - y + 5\omega = 0 \end{cases}$$

1.1.101. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ και $\Gamma(-1, 6)$.

1.1.102. Να βρείτε τριψήφιο αριθμό αν συμβαίνουν συγχρόνως τα παρακάτω:

⇒ Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 10

⇒ Ο αριθμός αυξάνεται κατά 45 αν εναλλάξουμε τη θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.

⇒ Ο αριθμός αυξάνεται κατά 90 αν εναλλάξουμε τη θέση των δύο πρώτων ψηφίων του.

1.1.103. Ένας εισοδηματίας παίρνει κάθε μήνα χρήματα από 3 ακίνητα που τα νοικιάζει. Από το 1^ο και το 2^ο ακίνητο παίρνει μαζί 300 ευρώ. Από το 2^ο και το 3^ο ακίνητο μαζί παίρνει 400 ευρώ. Από το 3^ο και το 1^ο ακίνητο μαζί, παίρνει 500 ευρώ. Πόσα χρήματα παίρνει από όλα τα ακίνητα μαζί και πόσα από το κάθε ακίνητο;

1.1.104. Τρεις ποδοσφαιριστές Α, Β, Γ έχουν σημειώσει στο τέλος του πρωταθλήματος 45 γκολ. Αν ο ποδοσφαιριστής Β μαζί με τον ποδοσφαιριστή Γ σημείωσαν διπλάσια γκολ από τον ποδοσφαιριστή Α και ο ποδοσφαιριστής Γ δυο γκολ περισσότερα από τον ποδοσφαιριστή Β, να βρείτε πόσα γκολ έχει σημειώσει ο κάθε ποδοσφαιριστής.

1.2. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σε μη γραμμικά συστήματα προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μια εξίσωση μ' έναν άγνωστο και αφού τον βρούμε, διαδοχικά βρίσκουμε και τους υπόλοιπους αγνώστους.

Παράδειγμα:

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 - 2xy - y^2 = 7 \end{cases}$$

☀ Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y : $y = 1 - 2x$ (1)

☀ Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$x^2 - 2x(1 - 2x) - (1 - 2x)^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4x^2 - (1 - 4x + 4x^2) - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4x^2 - 1 + 4x - 4x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4$$

☀ Για $x = 2$ η (1) γίνεται $y = 1 - 4 \Leftrightarrow y = -3$

Για $x = -4$ η (1) γίνεται $y = 1 + 8 \Leftrightarrow y = 9$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι: $(x, y) = (2, -3)$ και $(x, y) = (-4, 9)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.2.1. Να λυθεί το σύστημα :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases}$$

Θέτουμε $x^2 = \alpha$ και $y^2 = \beta$ οπότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha - 2\beta = 2 \end{cases} \stackrel{(-)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 3\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = 5 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Έτσι $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Δηλαδή οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, -1)$ και $(-2, 1)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν και στις δύο εξισώσεις οι άγνωστοι είναι υψωμένοι σε δυνάμεις (συνήθως στο τετράγωνο) τότε θέτουμε $x^2 = \alpha$ και $y^2 = \beta$ οπότε το σύστημα μετατρέπεται σε γραμμικό και το λύνουμε κατά τα γνωστά. Αφού προσδιορίσουμε τα α, β επιστρέφουμε στις ισότητες που έχουμε θέσει για να προσδιορίσουμε τα x, y .

1.2.2. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + |y-2| = 5 \\ 2\sqrt{x-1} - 3|y-2| = -5 \end{cases}$$

Πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Θέτουμε $\sqrt{x-1} = \alpha$ και $|y-2| = \beta$ οπότε

το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{x-1} + |y-2| = 5 \\ 2\sqrt{x-1} - 3|y-2| = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 2\alpha - 3\beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 - \beta \\ 2\alpha - 3\beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 - \beta \\ 2(5 - \beta) - 3\beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \alpha = 5 - \beta \\ 10 - 2\beta - 3\beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 - \beta \\ -5\beta = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Έτσι $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}^2 = 2^2 \Leftrightarrow x-1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$

και $|y-2| = 3 \Leftrightarrow y-2 = 3$ ή $y-2 = -3 \Leftrightarrow y = 5$ ή $y = -1$

Δηλαδή οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(5, 5)$ και $(5, -1)$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν οι μεταβλητές ενός συστήματος εμφανίζονται κάτω από ρίζες τότε πρέπει να πάρουμε περιορισμούς τις υπόρριζες ποσότητες μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

Αν οι άγνωστοι εμφανίζονται σε μορφή $|x|$ τότε θέτουμε $|x| = \alpha$, με $\alpha \geq 0$.

1.2.3. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

Από τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2$$

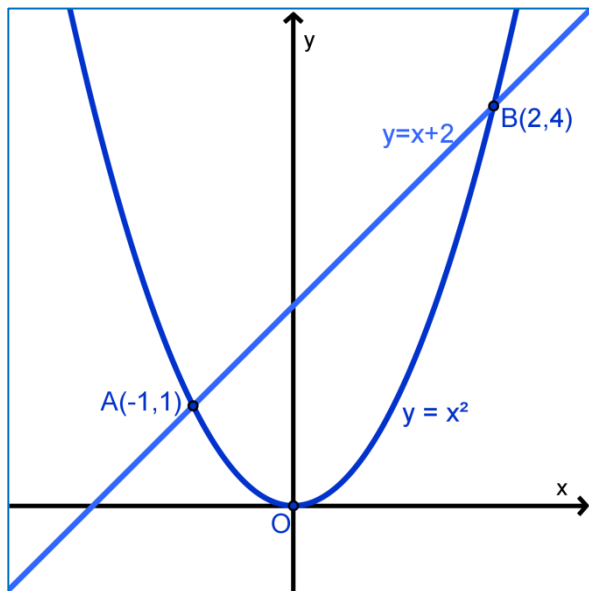
Από την δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε:

- Αν $x = -1$ τότε $y = 1$

- Αν $x = 2$ τότε $y = 4$

Άρα οι λύσεις (x, y) είναι τα ζευγάρια $(-1, 1)$ και $(2, 4)$

Οι λύσεις είναι τα σημεία τομής της ευθείας $\varepsilon: y = x + 2$ και της παραβολής $C: y = x^2$:



ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν σε ένα σύστημα 2ου βαθμού η μία από τις δύο εξισώσεις είναι 1^{ου} βαθμού τότε το σύστημα λύνεται με αντικατάσταση. Δηλαδή, λύνουμε την εξίσωση 1^{ου} βαθμού ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε την τιμή του στην άλλη εξίσωση.

1.2.4. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $y = 1 - x$ (1)
και, αν αντικαταστήσουμε στην πρώτη,
παίρνουμε $x^2 + (1 - x)^2 + x(1 - x) = 3 \Leftrightarrow$
 $x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ (2)
Η (2) έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$, οπότε λόγω
της (1) είναι $y_1 = 1 - x_1 = 1 + 1 = 2$ και
 $y_2 = 1 - x_2 = 1 - 2 = -1$.
Επομένως το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη
 $(-1, 2)$ και $(2, -1)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να επιλύσουμε μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης λύνοντας τη γραμμική εξίσωση ως προς x ή ως προς y και στη συνέχεια κάνουμε αντικατάσταση στη μη γραμμική εξίσωση.

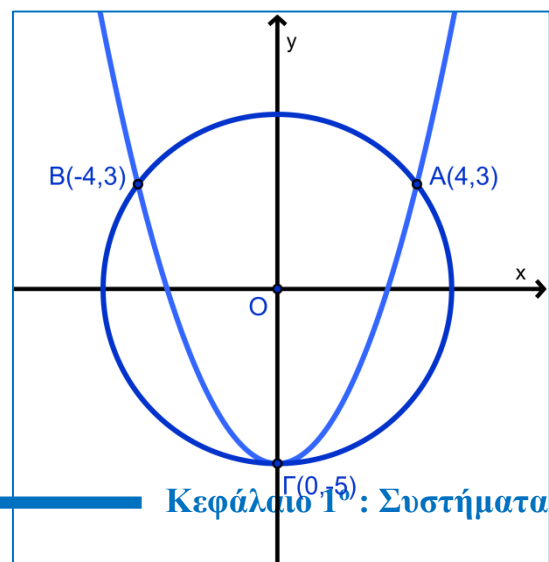
1.2.5. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 = 2y + 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$
 και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

Η δεύτερη εξίσωση λόγω της πρώτης γίνεται
 $2y + 10 + y^2 = 25$ ή, ισοδύναμα, $y^2 + 2y - 15 = 0$,
η οποία έχει ρίζες $y_1 = 3$ και $y_2 = -5$. Για $y = 3$
έχουμε $x^2 = 16$, οπότε $x = 4$ ή $x = -4$.
Για $y = -5$ έχουμε $x^2 = 0$, οπότε $x = 0$.
Άρα το σύστημα έχει τρεις λύσεις τις $(4, 3)$,
 $(-4, 3)$, $(0, -5)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος

ΜΕΘΟΔΟΣ

Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.



είναι ότι η παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ και ο

κύκλος $x^2 + y^2 = 5^2$ έχουν τρία κοινά σημεία.

1.2.6. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

Είναι $xy = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{y}$ (είναι $y \neq 0$)

Τότε $x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4 + y^4 - 5y^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι διτετράγωνη.

Θέτουμε $y^2 = \omega$ και γίνεται:

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega = 4$$

Έτσι:

$$\star y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

$$\Rightarrow \text{Αν } y = 1 \text{ τότε } x = 2$$

$$\Rightarrow \text{Αν } y = -1 \text{ τότε } x = -2$$

$$\star y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

$$\Rightarrow \text{Αν } y = 2 \text{ τότε } x = 1$$

$$\Rightarrow \text{Αν } y = -2 \text{ τότε } x = -1$$

Τελικά $(x, y) = (2, 1)$

ή $(x, y) = (-2, -1)$ ή $(x, y) = (1, 2)$

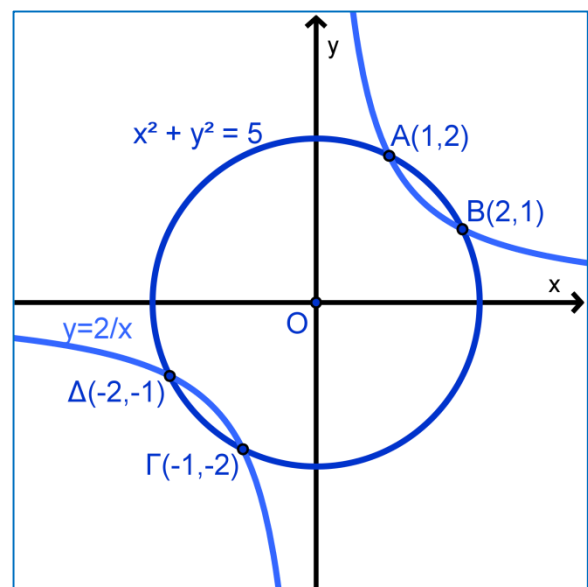
ή $(x, y) = (-1, -2)$

Οι λύσεις είναι τα σημεία τομής της υπερβολής $C: y = \frac{2}{x}$ και του κύκλου

$$C': x^2 + y^2 = 5.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων, στην μία εξίσωση οι μεταβλητές είναι υψωμένες σε δυνάμεις και στην άλλη είναι σε μορφή γινομένου, τότε λύνουμε το γινόμενο ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη.



1.2.7. Δίνεται η παραβολή $y = -x^2$ και η ευθεία $y = 2x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

$$\text{Λύνουμε το σύστημα } \begin{cases} y = 2x + \kappa & (1) \\ y = -x^2 & (2) \end{cases}$$

Από τις (1) και (2) θα είναι:

$$-x^2 = 2x + \kappa \Leftrightarrow x^2 + 2x + \kappa = 0 \quad (3)$$

Είναι φανερό ότι οι δύο γραμμές θα τέμνονται σε δύο σημεία, μόνο αν το σύστημα έχει δύο λύσεις, που σημαίνει ότι η εξίσωση (3) θα πρέπει να έχει

δύο λύσεις. Αυτό συμβαίνει, μόνο αν είναι $\Delta = 4 - 4\kappa > 0 \Leftrightarrow \kappa < 1$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να βρούμε τα κοινά σημεία παραβολής και ευθείας επιλύουμε το σύστημά τους. Η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία αν και μόνον αν το σύστημά τους έχει δύο λύσεις.

1.2.8. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

Με αντικαταστάτη του $y = x + \mu$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε την

$$2(x + \mu) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2\mu = 0 \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της (1) είναι $\Delta = 4 + 8\mu = 4(1 + 2\mu)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$\Rightarrow \Delta > 0$, δηλαδή $\mu > -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει δύο ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει

δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία τέμνονται σε δύο σημεία.

$\Rightarrow \Delta = 0$, δηλαδή $\mu = -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει διπλή ρίζα, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει

μία λύση, οπότε η παραβολή και η ευθεία εφάπτονται.

$\Rightarrow \Delta < 0$, δηλαδή $\mu < -\frac{1}{2}$. Η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

1.2.9. Έχουμε δύο τετράγωνα που έχουν άθροισμα περιμέτρων 44m και διαφορά εμβαδών 11 m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις των πλευρών.

Έστω x η πλευρά του πρώτου τετραγώνου και y η πλευρά του δεύτερου. Έχουμε το

$$\text{σύστημα: } \begin{cases} 4x + 4y = 44 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - y \\ (11 - y)^2 - y^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - y \\ 121 - 22y + y^2 - y^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - y \\ 22y = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}. \text{ Άρα οι διαστάσεις των πλευρών είναι } x = 6 \text{ και } y = 5.$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να επιλύσουμε πρόβλημα με τη βοήθεια των συστημάτων κατασκευάζουμε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και το επιλύουμε κατά τα γνωστά.

1.2.10. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 120 cm^2 . Αν η μία διάσταση του ορθογωνίου αυξηθεί κατά 3 cm , ενώ η άλλη ελαττωθεί κατά 2 cm , τότε το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Αν x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε είναι $xy = 120$ (1) και

$$(x + 3)(y - 2) = 120 \quad (2)$$

Η (2) γράφεται $xy + 3y - 2x - 6 = 120$ και λόγω της (1) γίνεται

$$120 + 3y - 2x - 6 = 120 \Leftrightarrow 3y - 2x = 6 \Leftrightarrow y = \frac{2x + 6}{3} \quad (3)$$

Τότε η (1) γίνεται: $x\left(\frac{2x+6}{3}\right)=120 \Leftrightarrow 2x^2+6x=360 \Leftrightarrow x^2+3x-180=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1=12$ και $x_2=-15$.

Επειδή οι διαστάσεις είναι πάντοτε θετικές θα έχουμε $x=12cm$, οπότε, λόγω

της (1) θα είναι $y=\frac{120}{x}=\frac{120}{12}=10cm$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

1.2.11. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

α. Ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους δεν μπορεί να έχει μία μόνο λύση.

β. Ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

γ. Η εξίσωση $x^2+y^2=10$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 10.

δ. Η ευθεία $y=x$ τέμνει τον κύκλο $x^2+y^2=1$ σε δύο σημεία.

ε. Η ευθεία $y=3$ δεν τέμνει την υπερβολή $y=-\frac{1}{x}$.

στ. Το σύστημα $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

ζ. Ο κύκλος $x^2+y^2=1$ και η παραβολή $y=x^2+1$ δεν έχουν κοινά σημεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1.2.12. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 4 \\ -\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x + y + \frac{3x}{y} = 5 \\ (x + y) \frac{3x}{y} = 6 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ -2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y-1} = 4 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} |x-2| + 2y^2 = 3 \\ 2|x-2| + 3y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\epsilon. \begin{cases} 2|x| + 5y^2 = 20 \\ 3|x| + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\sigma\tau. \begin{cases} 3\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 7 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -1 \end{cases}$$

1.2.13. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} y = 2x^2 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\delta. \begin{cases} x^2 + y^2 = 89 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

1.2.14. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$\beta. \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

1.2.15. Να λυθούν τα συστήματα:

α.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y + xy = 3 \end{cases}$$

1.2.16. Να λύσετε τα συστήματα

α.
$$\begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3y = 4 \end{cases}$$

β.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

γ.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

1.2.17. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και η παραβολή $C: y = x^2$

α. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (C) σε δύο σημεία.

β. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τα κοινά σημεία των (ε) και (C).

1.2.18. Να βρεθεί ο $\rho > 0$, ώστε ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και η ευθεία με εξίσωση $x - y = 2$:

α. Να μην έχουν κανένα κοινό σημείο

β. Να έχουν δύο κοινά σημεία

γ. Να έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

1.2.19. Από τους τύπους $S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ και $v = v_0 + a t$, να δείξετε ότι:

$$S = \frac{v + v_0}{2} \cdot t.$$

1^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών:

α. Οι ευθείες με εξίσωση $x - 2y = 3$ και $2x - 4y = 6$ ταυτίζονται. Σ ☐ Λ ☐

β. Το σύστημα $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$ είναι αδύνατο. Σ ☐ Λ ☐

γ. Το σύστημα $\begin{cases} 0x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (0, 5)$. Σ ☐ Λ ☐

δ. Το σύστημα $\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ έχει δύο διαφορετικές λύσεις. Σ ☐ Λ ☐

ε. Η ευθεία $y = -x + 2$ και η παραβολή $y = x^2$ έχουν κοινά σημεία. Σ ☐ Λ ☐

B. Να βρείτε γραφικά το πλήθος των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

(Μονάδες 15+10=25)

ΘΕΜΑ 2^ο

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{1-4y}{6} = 1 \\ \frac{2x-y}{2} - \frac{x+y}{4} = 3 \end{cases}$

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 3^ο

Η εξίσωση μιας παραβολής είναι $y = ax^2 + bx + \gamma$ όπου $a, b, \gamma \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από τα σημεία $A(1,2), B(-1,0)$ και $\Gamma(2,-3)$

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η εξίσωση $(\kappa + 2)x + (\kappa - 1)y = 6$ (1). Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Πότε $\varepsilon \parallel x'x$ και πότε $\varepsilon \parallel y'y$;

(Μονάδες

12)

β. Η ευθεία ε διέρχεται από σταθερό σημείο M για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

2° ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

A1. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\beta \neq 0$.

α. Να γράψετε την ευθεία που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση και να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσής της.

β. Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$

(Μονάδες 3+2=5)

A2. Πόσες περιπτώσεις μπορούν να προκύψουν από τη λύση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 και πόσες λύσεις έχουμε σε κάθε περίπτωση.

(Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = \gamma$ παριστάνει ευθεία γραμμή. **Σ** ☐ **Λ** ☐

β. Το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** ☐ **Λ** ☐

γ. Αν δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται, τότε το σύστημα των εξισώσεών τους έχει μοναδική λύση. **Σ** ☐ **Λ** ☐

δ. Το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2, \rho \neq 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ έχει το ακριβώς δύο λύσεις. **Σ** ☐ **Λ** ☐

ε. Η εξίσωση $x - 2y = -1$ έχει λύσεις όλα τα ζεύγη της μορφής $(κ, -2κ), κ \in \mathbb{R}$.

Σ □ Λ □

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): x + 2y = 5$ και $(\varepsilon_2): 2x - 3y = -4$

B1. Να βρείτε το σημείο τομής (x_0, y_0) των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

(Μονάδες 12)

B2. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, αν το ζεύγος (x_0, y_0) είναι λύση του

$$\text{συστήματος: } \begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{2y}{\beta} = 14 \\ \frac{3x}{\alpha} - \frac{2y}{\beta} = -6 \end{cases}$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{Δίνεται το σύστημα: } \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + \kappa \end{cases}$$

Γ1. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση.

(Μονάδες 10)

Γ2. Για $\kappa = -1$, να λύσετε το σύστημα και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

★ η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού,

✧ ο λόγος της ηλικίας του παιδιού προς την ηλικία του πατέρα ισούται με $\frac{3}{11}$,

✧ το άθροισμα των ηλικιών και των τριών μελών ισούται με 115 έτη.

Δ1. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 12)

Δ2. Να βρείτε την ηλικία κάθε μέλους.

(Μονάδες 13)