ΟΡΙΣΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α, τι ονομάζεται τιμή της f στο x και πώς συμβολίζεται ;

Απάντηση

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y.

Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

✦ Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

✦ Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f

Ερώτηση 2

Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μια συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το Α ;

Απάντηση

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$ λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y \,/\, y = f(x)$ για κάποιο $x \in A\}$.

Ερώτηση 3

Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x, f(x))$, $x \in \mathrm{A}$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

Ερώτηση 4

Πότε δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες ;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Ερώτηση 5

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα. Πως ορίζεται το άθροισμα $f+g$, η διαφορά $f-g$, το γινόμενο $f \cdot g$ και το πηλίκο $\frac{f}{g}$ τους ;

Ποιο θα είναι το πεδίο ορισμού της κάθε πράξης ;

Απάντηση

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και $f \cdot g$ είναι η τομή $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ των πεδίων ορισμού A και B, των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x / x \in \mathrm{A}$ και $x \in \mathrm{B}$, με $g(x) \neq 0\}$.

Ερώτηση 6

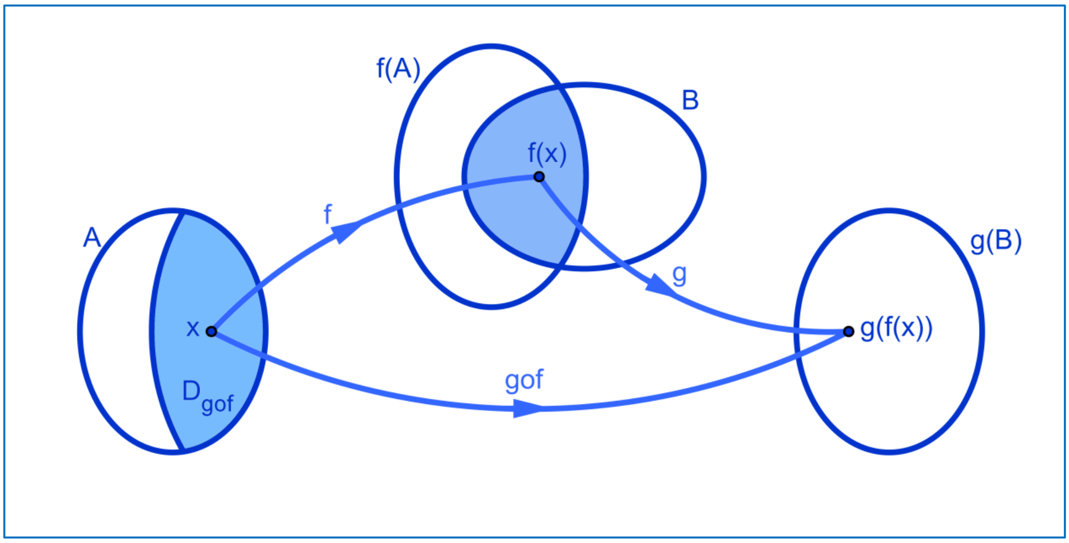
Τι ονομάζουμε σύνθεση της συνάρτησης f με την συνάρτηση g και ποιο το πεδίο ορισμού της σύνθεσης ;

Απάντηση

✦ Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

✦ Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $\mathrm{A}_{g \circ f} = \{x \in \mathrm{A} / f(x) \in \mathrm{B}\}$.

⇨ Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $\mathrm{A}_{g \circ f} \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$.



1.3. ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μονοτονία συνάρτησης

Ερώτηση 7

Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα, πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη, σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση

- Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Ερώτηση 8

Πότε μία συνάρτηση f λέγεται αύξουσα, και πότε φθίνουσα , σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση

- Μια συνάρτηση f λέγεται **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ακρότατα συνάρτησης

Ερώτηση 9

Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο ;

Απάντηση

❋ Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

❋ Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

⇨ Το (ολικό) μέγιστο και (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) ακρότατα της f.

Συνάρτηση «1−1»

Ερώτηση 10

Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1–1» ;

Απάντηση

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1–1» , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Αντίστροφη συνάρτηση

Ερώτηση 11

Πότε και με ποιον τρόπο ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f, ποιες οι ιδιότητές της ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι «1–1», τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(\mathrm{A})$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της Α για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(\mathrm{A})\to\mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y\in f(\mathrm{A})$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in\mathrm{A}$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})$ της f,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$.

Η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Επομένως έχουμε $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

Οπότε: $f^{-1}(f(x))=x,\ x\in\mathrm{A}$ και $f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(\mathrm{A})$

1.4. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Η έννοια του ορίου

✵ Όταν οι τιμές μια συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 τότε γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ και διαβάζουμε: “το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ” ή “το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ”.

1.5. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Όριο και διάταξη

Θεώρημα 1ο

✦ Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

✦ Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Θεώρημα 2ο

✦ Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Κριτήριο παρεμβολής

Ερώτηση 12

Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

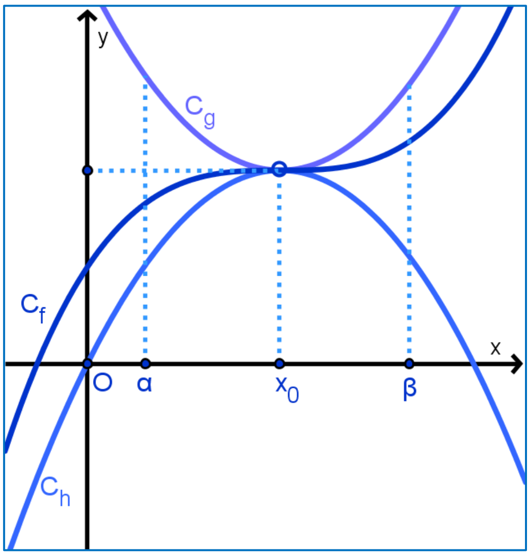
Θεώρημα

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h, αν

⇨ $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και

⇨ $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.



Τριγωνομετρικά όρια

Θεώρημα

❉ Ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$)

Θεώρημα

❉ $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$

❉ $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

Θεώρημα

❉ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

❉ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

1.6. ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

Θεώρημα (όριο αθροίσματος)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$-\infty$

Θεώρημα (όριο γινομένου)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\alpha>0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**.

Δηλαδή , απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι: $(+\infty)+(-\infty)$ και $0\cdot(\pm\infty)$

⇨ Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\dfrac{0}{0}$ και $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

1.7. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Βασικά όρια

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ χρειαζόμαστε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν ν άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν ν περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

- Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0$, με $\alpha_{\nu} \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\alpha_{\nu}x^{\nu}\right)$ και $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\alpha_{\nu}x^{\nu}\right)$

- Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_{\kappa}x^{\kappa} + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \ldots + \beta_0}$, με $\alpha_{\nu} \neq 0$ και $\beta_{\kappa} \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}$

Όρια εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης

- Αν $\alpha > 1$, τότε:

⇨ $\lim_{x\to-\infty} \alpha^{x} = 0$ ⇨ $\lim_{x\to0} \log_{\alpha} x = -\infty$

⇨ $\lim_{x\to+\infty} \alpha^{x} = +\infty$ ⇨ $\lim_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$

Επομένως:

⇨ $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ ⇨ $\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$

⇨ $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ ⇨ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

✵ Αν $0<\alpha<1$, τότε:

⇨ $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$ ⇨ $\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty$

⇨ $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ ⇨ $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

Ερώτηση 13

Τι ονομάζουμε ακολουθία, και ποιος ο ορισμός για το πεπερασμένο όριό της ;

Απάντηση

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$

Η εικόνα της ακολουθίας $\alpha(\nu)$ συμβολίζεται συνήθως με α_ν, ενώ η ακολουθία α συμβολίζεται με (α_ν).

Επειδή το πεδίο ορισμού κάθε ακολουθίας, είναι το $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,4,...\}$ έχει νόημα να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της για πολύ μεγάλες τιμές του ν, δηλαδή όταν $\nu\to+\infty$. Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell\in\mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\ell$, όταν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu>\nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu-\ell|<\varepsilon$. Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $x\to+\infty$, που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες.

1.8. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

Ερώτηση 14

Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ερώτηση 15

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ;

Απάντηση

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της , τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής .

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

Ερώτηση 16

Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β);

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Ερώτηση 17

Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$

Θεώρημα Bolzano

Ερώτηση 18

Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

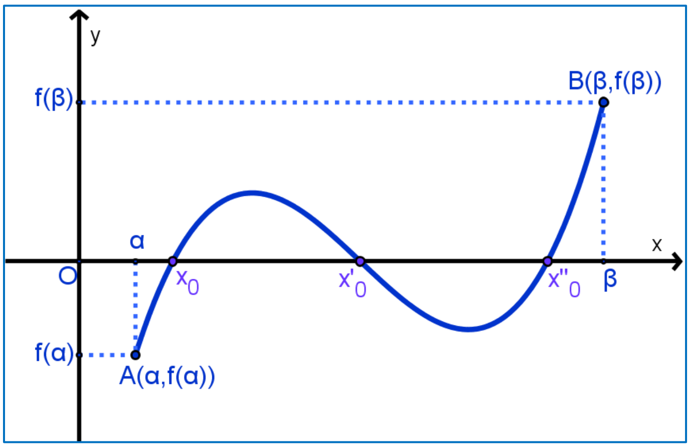
Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία (τουλάχιστον) ρίζα στο διάστημα (α,β).

Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η C_f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής

Ερώτηση 19

Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $\mathrm{M} = f(x_2)$, να ισχύει: $m \le f(x) \le \mathrm{M}$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$